ELEMENTA
MATHEMATICA

Digitized by Google

Digitized by Google

P. F. FORTUNATI
A BRIXIA

Ord. Min. Ref. Prov. Brixiæ Lect. Theol. Scriptoris Ord. & in Brixiana Academia Publ. Matheſeos & naturalis Philoſ. Profeſſoris

ELEMENTA MATHEMATICA

IN QUATUOR TOMOS DIGESTA.

TOMUS SECUNDUS

In quo linearum atque planorum ſymptomata demonſtrantur.

BRIXIÆ. CIƆIƆCCXXXVIII.
Typis Joannis-Mariæ Rizzardi.
SUPERIORUM FACULTATE.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDEX
LIBRORUM
QUI IN HOC SECUNDO TOMO CONTINENTUR.

LIBER III.
De angulis, qui fiunt a recta linea alteri rectæ inſiſtente, eamque ſecante.

LIBER IV.
De rectis lineis parallelis.

LIBER V.
De triangulis planis rectilineis.

LIBER VI.
De quadrilateris, & polygonis.

LIBER VII.
De circulo.

LIBER VIII.
De planorum ſectione, & ſitu.

LIBER IX.
De planorum ſimilitudine, & ratione.

LIBER X.
De planorum dimenſione.

APPRO-

Digitized by Google

APPROBATIONES.

NUtibus obſequentes Reverendiſſimi P. Felicis a Roma hujus Ciſmontanæ Reformatorum Familiæ V. Comiſs. Generalis, nos infraſcripti Lectores Theologi vidimus, atque attento animo expendimus *Tomum II. Elementorum Mathematicorum R. P. Fortunati a Brixia hujus Reformatæ Brixianæ Provinciæ Lect. Theol., Scriptoris Ordinis, & in Academ. Brixienſi Publ. Philoſ., ac Matheſeos Profeſſoris*. Cumque nihil plane deprehenſum a nobis in eo fuerit, quod vel Catholicæ Fidei, vel ſanis moribus minus conſentaneum ſit, nihil ſane impedit, quominus præclarum hujuſmodi opus publica fruatur luce, dummodo tamen iis quoque ita videatur, ad quos de jure ſpectat. In quorum fidem &c.

Brixiæ in Conventu Corporis Chriſti die 24. Julii 1738.

F. Proſper a Brixia Lect. Theol.
F. Jo: Baptiſta a Brixia Lect. Theol.

F. FELIX A ROMA STRICT. OBSERV. S. P. N. FRANCISCI, Lect. Emeritus, Sac. Congr. Indicis Conſultor, iterato Proc. Gen̄lis, & in hac Ciſmontana Reformator. Familia V. Comiſſ. Generalis, & humilis in Domino Servus.

Dilecto Nobis in Chriſto P. F. Fortunato a Brixia Lect. Theol., Script. Ordinis, noſtræ Ref. Prov. Brixiæ Alumno Salutem, & Seraphicam Benedictionem.

CUm juxta Apoſtolicas, noſtrique Ordinis Conſtitutiones liber, cui titulus eſt: *Elementorum Mathematicorum Tom. II.* a te elaboratus ab idoneis Noſtræ Reformationis Cenſoribus, ad id ſpecialiter a Nobis deputatis, recognitus fuerit, & approbatus, Nos præſentium tenore, ac cum ſalutaris obedientiæ merito, tibi facultatem facimus, & impertimur, ut ſervatis aliàs de jure ſervandis, illud typis evulgare poſſis, & valeas.

Dat. Romæ ex noſtro Conventu S. Franciſci ad ripas Tyberis die 2. Auguſti 1738.

F. FELIX A ROMA V. Com. Gen.

L. ✠ S.

Reg. Stab. Brix.

De mandato P. S. Rm̄æ
F. Joannes Pius a Preſſano Secr. Gen.

NOI RIFORMATORI
DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del P. F. Tommaſo Maria de Angelis Inquiſitore di Breſcia, nel Libro intitolato: *P. F. Fortunati a Brixia Ord. Min. Ref Provinciæ Brixiæ, Elementa Mathematica Tomus ſecundus*; non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concedemo Licenza a Gian-Maria Rizzardi Stampatore in Breſcia, che poſſi eſſer ſtampato; oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. 22. Luglio 1738.

[*Gio: Franceſco Moroſini Kav. Rif.*
[*Pietro Grimani Proc. Rif.*
[

Agoſtino Gadaldini Segret.

SPHAL-

Digitized by Google

	SPHALMATA	CORRIGE

Elementorum Liber III.

§. 51. lin. 7.	duobus EAC, AED	duobus AEC, AED

Elementorum Liber V.

§. 66. lin. 5.	Quæ autem ei ſunt	Quæ autem eidem ſunt

Elementorum Liber VI.

§. 11. lin. 5.	*hexagonum*, ſi ſeptem	*hexagonum*, ſi ſex
§. 19. lin. 3.	ſit parallela	ſint parallela
§. 22. lin. 1.	Ut ſi angulus	Ut ſi angulus ABC

Elementorum Lib. VII.

§. 51.	*Circulum rectam*	*Circulus rectam*

Elementorum Liber VIII.

§. 10. lin. 6.	ſectioni GF	ſectioni GE
§. 17. lin. 4.	conincidere	coincidere
§. 22.	*in puncto ſecuerit*	*in puncto ſecuerint*

Elementorum Liber IX.

§. 75. lin. 11.	Eſt autem angulus AEB	Eſt autem angulus AEC
Ibid. lin. 16.	Ergo erit BC. AC = BC. EC.	Ergo erit BC. AC = AC. EC.

Alia levioris momenti, ſi quæ occurrerint, benevolus Lector patienter corrigat.

ELE-

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER III.

De angulis, qui fiunt a recta linea alteri rectæ inſiſtente, eamque ſecante.

Affectiones quantitatis continuæ permanentis demonſtraturi, a *linea*, utpote quæ primam illius ſpeciem conſtituit, initium ſumimus: qua quidem in re ſymptomata illa priori loco expendemus, quæ a recta linea alteri rectæ inſiſtente, eamque ſecante dependent.

DEFINITIO I.

1 *Punctum eſt, cujus pars nulla*, ſeu quod a nobis ita ſpectatur, perinde ac ſi reipſa nullam omnino partem, nullamque extenſionem haberet. Præſcindit namque Geometra, an reapſe exiſtat, vel exiſtere queat indiviſibile quantitatis, ſibique ſatis eſt, ut dimenſiones in eo, quod eſt extenſum, negligere poſſit, illud ſcilicet conſiderando ac ſi nulla omnino extenſione præditum eſſet.

COROLLARIUM.

2 *Unum punctum non eſt majus alio.* Non enim poteſt unum a nobis concipi veluti majus alio, niſi partes in eo diſtinguantur, quarum una illud aliud adæquet (a).

DEFINITIO II.

3 *Linea eſt longitudo latitudinis, & profunditatis plane expers.* magnitudo nimirum, in qua, ceteris dimenſionibus præciſis, ſeu omnino neglectis, ſola longitudo conſideratur. Rem praxis ipſa luculenter oſtendit, cum ſcilicet turris altitudinem, latitudinem fluminis, itinerisve longitudinem inquirimus, & determinamus, quin ceterarum dimenſionum, quæ in hiſce corporibus reperiuntur, ratio aliqua habeatur. Hinc nonnulli *lineam* concipiunt veluti magnitudinem ex fluxu puncti productam, ipſamque *puncti fluxum* appellant. Dividitur porro linea in *rectam*, *curvam*, & *mixtam*; & ſi finita fuerit, illius extrema ſunt puncta.

DEFINITIO III.

4 *Linea recta dicitur illa, quæ ſuis ex æquo interjicitur punctis*, cujuſmodi eſt linea A B. E contrario vero illa *curva vocatur, quæ inter ſua extrema extollitur, vel deprimitur*, ut
Fig. 1. linea CD. Illa demum *mixta cenſetur, quæ una ſui parte re-*
Fig. 2. *cta eſt, altera curva*, qualem exhibet linea E F.
Fig. 3. Tab. I.

SCHOLION.

5 Lineam *rectam* pulchre definit Plato, dum ait, *rectam lineam eſſe, cujus media obumbrant extrema*. Si namque linea
Fig. 1. AB eſt recta, oculus G poſitus in altero illius extremo A
Tab. I. nullam illius partem diſcernet, ſed tota ipſa linea quaſi punctum ſibi videbitur, quatenus nempe ob lineæ rectitudinem, extre-

(a) Synopſis Algeb. §. 254.

Digitized by Google

xtremum punctum A impedit, quominus partes inter extrema poſitæ in oculum agant, ſuique imaginem in oculi fundo efficiant.

DEFINITIO IV.

6 *Angulus planus eſt duarum linearum in uno puncto concurrentium mutua quædam inclinatio*. Sic inclinatio mutua duarum linearum AB, CB, ex eodem puncto B erumpentium, *angulus* dicitur, cujus *apex* vocatur punctum B, in quo lineæ ipſæ concurrunt, *crura* vero lineæ AB, CB. Fig. 4. Tab. I.

Monitum.

7 Angulus quicunque tribus alphabeti literis indicari ſolet, ea quidem lege, ut earum media *anguli apicem* deſignet.

COROLLARIUM I.

8 Ex eo, quod tota *anguli* natura in mutua duarum linearum inclinatione conſiſtat, manifeſte ſequitur, *magnitudinem anguli non ex linearum ipſum conſtituentium longitudine, ſed ex illarum dumtaxat diſtractione a ſe mutuo, æſtimandam eſſe*, adeo nimirum ut eadem ſemper ſit magnitudo anguli, ſive ipſius crura producantur, ſive minuantur. Hinc

COROLLARIUM II.

9 *Duæ lineæ, quo magis a ſe mutuo diſtractæ ſunt, eo majorem angulum conſtituunt; eo minorem vero, quo minus ſunt diſtractæ*; ut proinde *ex duobus angulis ille ſit major altero, cujus crura ſunt magis diſtracta*, & viciſſim *angulus major, crura magis diſtracta habeat*. Sic angulus ABC major eſt angulo DBE, quamvis duæ lineæ AB, CB minores ſint duabus DB, BE; quia nimirum magis a ſe mutuo diſtractæ ſunt duæ AB, CB, quam duæ DB, BE. Viciſſim quoque ex eo, quod angu- Fig. 5. Tab. I.

lus ABC major ſit angulo DBE, magis a ſe mutuo diſtractæ erunt duæ AB, CB, quam duæ DB, BE.

COROLLARIUM III.

10 *Anguli æquales habent crura æque diſtracta; & viciſſim anguli, qui habent crura æque diſtracta, ſunt æquales.*

SCHOLION.

11 Conſiderando angulum penes lineas ipſum conſtituentes, dividitur in *rectilineum*, *curvilineum*, & *mixtum*. Angulus vero *rectilineus*, attenta linearum diſtractione, in *rectum*, *acutum*, & *obtuſum*.

DEFINITIO V.

12 *Angulus rectilineus dicitur ille, qui a duabus rectis lineis* Fig. 6. Tab. I. *efficitur*. Hujuſmodi eſt angulus ABC; cum rectæ ſint lineæ AB, BC, quæ ipſum conſtituunt.

DEFINITIO VI.

13 *Menſura anguli rectilinei eſt arcus circuli, arbitrario intervallo ex illius apice deſcripti, inter ipſius anguli crura comprehenſus*. Ut ſi ex apice B anguli rectilinei ABC, arbitrario in- Fig. 6. Tab. I. tervallo B*d*, deſcribatur circulus F*de*, arcus *de* ipſius circuli inter crura BA, BC comprehenſus, eſt menſura ipſius anguli ABC. Determinat namque diſtractionem a ſe mutuo linearum AB, CB, quantaque ipſa ſit, definit. Hinc

COROLLARIUM.

14 *Anguli rectilinei ſunt directe inter ſe, ut arcus circulorum, ex eorum apicibus eodem intervallo deſcriptorum, quos ipſorum angulorum crura comprehendunt*; & viciſſim *arcus hujuſmodi ſunt* Fig. 6. *directe inter ſe, ut ipſi anguli*. Nimirum angulus ABC eſt ad angu-

angulum DEF, ut arcus *a b* ad arcum *c d*, qui eodem intervallo ex illorum apicibus B, E deſcripti, inter ipſorum angulorum crura continentur; & viciſſim arcus *a b* eſt ad arcum *c d*, ut eſt angulus ABC ad angulum DEF. Fig. 7. Tab. I.

SCHOLION.

15 Non aliam circuli notionem hic, & in ſequentibus ſupponimus, niſi quam etiam rudis quiſque habet, quæque propterea nobis congenita jure ac merito cenſeri poteſt.

DEFINITIO VII.

16 *Angulus curvilineus vocatur ille, quem curvæ lineæ efficiunt*, cujuſmodi eſt angulus GHK. Fig. 9. Tab. I.

DEFINITIO VIII.

17 *Angulus mixtilineus eſt ille, cujus alterum crus eſt linea recta, alterum curva*, ut angulus LMN. Fig. 10. Tab. I.

DEFINITIO IX.

18 *Angulus rectus vocatur ille, qui, alterutra rectarum ipſum conſtituentium per ipſius anguli apicem in directum producta, angulum habet ex altera parte ſibi æqualem*. Sic angulus ABC *rectus* eſt; quia, recta AB directe producta in D, angulus inde factus DBC eſt ipſi ABC æqualis. Fig. 11. Tab. I.

COROLLARIUM.

19 *Si alterum crus anguli recti in directum per ipſius anguli apicem producatur, alter angulus rectus efficitur*. Rectus nimirum erit angulus CBD, ſi rectus fuerit angulus ABC. Quandoquidem angulus ille rectus eſt, qui rectum angulum adæquat. Fig. 11. Tab. I.

DEFI-

DEFINITIO X.

20 *Angulus acutus eſt ille, qui minor eſt recto*. Talis eſt an-
Fig. 12. Tab. I. gulus ABC. Is enim deficit ab angulo recto DBC.

DEFINITIO XI.

21 *Ille angulus obtuſus vocatur, qui rectum ſuperat*. Hujuſ-
Fig. 13. Tab. I. modi eſt angulus ABC; cum ſit major recto DBC.

DEFINITIO XII.

22 *Illa recta linea dicitur alteri rectæ perpendicularis, quæ ita illi inſiſtit, ut duos hinc inde angulos inter ſe æquales efficiat*. Sic recta linea CB perpendicularis erit rectæ AD, ſi æquales
Fig. 11. Tab. I. fuerint anguli CBA, CBD.

COROLLARIUM I.

23 *Recta linea ad perpendiculum alteri rectæ inſiſtens duos hinc inde rectos angulos efficit*. Ut ſi recta CB perpendicularis fuerit rectæ AD, duo anguli ABC, CBD, erunt recti. Cum
Fig. 11. Tab. I. enim anguli ABC, CBD ſint hoc ipſo æquales inter ſe (a), uterque erit rectus (b).

COROLLARIUM II.

24 *Si una recta linea ita alteri rectæ inſiſtat, ut duos cum illa efficiat hinc inde angulos rectos, erit illi perpendicularis*. Recta nimirum CB perpendicularis erit rectæ AD, ſi recti fuerint
Fig. 11. Tab. I. duo anguli ABC, CBD. Si namque angulus ABC eſt rectus, angulus CBD erit illi æqualis (c); ac proinde recta CB ita incumbit rectæ AD, ut duos angulos inter ſe æquales cum ipſa AD producat.

DEFI-

(a) §.22. (b) §.19. (c) §.18.

DEFINITIO XIII.

25 Anguli, qui hinc inde fiunt a recta linea alteri inſi-
ſtente, dicuntur *deinceps poſiti*. Tales ſunt duo anguli CBA, Fig.11.
CBD producti a recta CB inſiſtente rectæ AD. Tab. I.

DEFINITIO XIV.

26 Si una recta linea AB alteram ſecet CD, ita ut qua-
tuor fiant anguli AEC, CEB, BED, AED in communi ſe- Fig.14.
ctionis puncto E, duo anguli AEC, BED, quemadmodum Tab. I.
etiam duo CEB, AED, *ad verticem oppoſiti* nuncupantur.

DEFINITIO XV.

27 *Duæ lineæ dicuntur habere ſegmentum commune, cum una
pars utrique communis eſt, ceteræ vero diverſæ, adeo ut angulum
in communi puncto conſtituant*. Sic duæ lineæ ABC, ABD ha- Fig.15.
bent commune ſegmentum AB; quia pars AB eſt utrique Tab. I.
communis, quoad alias vero partes divergentes a ſe mu-
tuo fiunt, angulumque producunt CBD.

DEFINITIO XVI.

28 *Duæ rectæ lineæ in directum jacere dicuntur, cum in com-
muni unionis puncto nullum plane angulum efficiunt, ſed unam ean-
demque rectam conſtituunt*. Sic in directum jacent duæ rectæ
AB, BC, quia ea ratione ſimul unitæ ſunt in puncto B, Fig.16. Tab. I.
ut nullus in eo *angulus* ab illis fiat, ſed unam efficiant re-
ctam AC.

POSTULATUM I.

A dato puncto ad datum quodvis punctum rectam lineam ducere.

29 Datis nimirum duobus punctis a ſe mutuo diſtantibus,
peti-

Digitized by Google

petitur; ut concedatur, rectam lineam ab eorum uno ad alterum duci poſſe. Res manifeſta eſt. Nihil enim impedit, quominus unum punctum per interjectum ſpatium directe moveatur, ut alteri tandem congruat.

SCHOLION.

30 Ducitur recta linea a dato puncto ad datum punctum ope *Regulæ* ligneæ, vel metallicæ, eam datis punctis ita applicando, ut ejus acies, ſecus quam poſtea, ope acus, linea deſignatur, illis perfecte congruat. Hinc vides, rectitudinem lineæ ducendæ a rectitudine aciei *Regulæ* unice dependere. Quamobrem curandum quammaxime eſt, ut acies *Regulæ* exactior ſit, quo fieri poſſit. Dupliciter itaque explorari poteſt, an exacta ſit *Regula*.

Examen I. Regulæ.

31 Collocetur dexter oculus, altero clauſo, ad extremum aciei ipſius *Regulæ*, juxta quam rectam lineam ducere volumus. Si radius viſualis nihil penitus offendat extantis, nihil videat declinantis, idonea erit *Regula*; ſecus vero ſi horum unum vel alterum experiri contigerit. Ratio hujus eſt; quia radius viſualis, ſive lumen, ſecundum rectam lineam exactiſſime propagatur.

Examen II. Regulæ.

32. Ducta linea ſecus aciem *Regulæ* examinandam; latus ipſum invertatur, ita nimirum ut extremum *Regulæ*, quod erat ad dexteram, ponatur ad ſiniſtram, tum eadem acies deſcriptæ lineæ applicetur, ut ejus extremis punctis perfecte congruat. Si acies ſic permutatim applicata, nullibi ſpatium cum linea antea deſcripta incluſerit, exacta erit *Regula*; vitioſa vero, ſi ſpatium alicubi cum illa comprehenderit. Duæ enim rectæ lineæ, ut dicemus, nequeunt ſpatium concludere.

POSTU-

POSTULATUM II.

Datam rectam lineam finitam in directum producere.

33 Petitur nimirum, ut data quævis recta linea finita in directum protrahi poſſit, adeo ut major fiat. Nihil enim implicantiæ in eo eſt, ut extremum ipſius lineæ punctum motu directo, ut antea, ſuum fluxum proſequatur.

SCHOLION.

34 Recta linea terminata in directum mechanice producitur ope *Regulæ*, eam ſcilicet ita lineæ ampliandæ applicando, ut ejus acies, ſecus quam poſtea data linea, mediante acu, producitur, illi perfecte congruat. *Videatur Clavius lem. XI. lib. 1. de Aſtrolabio.*

POSTULATUM III.

Datis puncto, & intervallo arcum circuli, totumque circulum deſcribere.

35 Datis nimirum puncto, & lubito intervallo, petitur, ut concedatur, arcum circuli lubitæ magnitudinis, ipſumque integrum circulum deſcribi poſſe. Profecto nihil prohibet, quominus punctum quodcunque curvo itinere fluere queat.

SCHOLION.

36 Deſcribitur arcus circuli, totusque circulus ope eximii cujuſdam inſtrumenti, quod latine *circinus*, italice *il compaſſo* vocatur, dum ſcilicet altero illius pede in dato puncto quieſcente, alter ſuper planum circumducitur, donec ad illud redeat punctum, a quo primum moveri cœpit. Ejus ſiquidem extremum, quod punctum eſt, curvo hujuſmodi

B itine-

itinere arcum circuli, totumque circulum in ipſo plano deſcribit. Affirmant porro plerique, *circinum* eſſe inventum Icari, cui Dædalus Pater laudem invidens tam mirifici inſtrumenti, necem machinatus fuerit.

Lemma fundamentale.

Omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

37 Quamquam hæc propoſitio inter *axiomata* ab Euclide, aliiſque celeberrimis Geometris cenſeatur; quia tamen maximi in Geometria momenti eſt, lubet eam breviter oſtendere. Sint itaque duo anguli recti ABC, *abc*. Dico, eos eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Si namque fieri poteſt, ſit angulus rectus *abc* major angulo recto ABC; ductaque proinde ex apice B recta BE, fiat angulus ABE angulo *abc* æqualis. Producta ergo in directum recta AB in D (a), cum ex hypotheſi angulus ABC
Fig.17. ſit rectus, erit angulus deinceps poſitus CBD ipſi ABC æ-
Fig.18. qualis (b). Eandem quoque ob cauſam angulus EBD æ-
Tab. I. qualis erit angulo ABE; cum etiam ipſe ABE, utpote æqualis angulo *abc*, poſitus ſit rectus. Eſt autem angulus ABE major angulo ABC (c). Ergo eodem angulo ABC major itidem erit angulus EBD (d); cumque duo anguli ABC, CBD ſint æquales inter ſe, angulus EBD major ſimiliter erit angulo CBD (e); atque adeo pars ſuperabit totum, quo nihil abſurdius (f). Angulus itaque *abc* major non eſt angulo ABC. Eodem modo oſtendam, non eſſe ipſo ABC minorem. Ergo duo anguli recti ABC, *abc* ſunt inter ſe æquales; omneſque propterea anguli recti ſeſe mutuo adæquant, quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) §. 33.
(b) §. 18.
(c) Synop. Algeb. § 257.
(d) Ibidem §. 264.
(e) Ibidem.
(f) Ibidem §. 257.

COROLLARIUM.

Omnes anguli recti æquales arcus ex eorum apicibus æquali intervallo deſcriptos ſubtendunt.

38 Cum enim arcus hujuſmodi ſint directe inter ſe, ut ipſi anguli, quibus ſubtenduntur (a), ſi omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales, æquales quoque erunt arcus, quos ex eorum apicibus æquali intervallo deſcriptos ſubtendunt.

SCHOLION.

39 Recte itaque Proclus vocat angulum rectum *finitum ſemper, atque determinatum, eundemque manentem, neque accretionem, neque decretionem ſuſcipientem.* Penes ipſum quoque ceteros *angulos rectilineos* definiri; *cum ipſi per ſe indefiniti, indeterminatique ſint*, ut patet.

THEOREMA I.

Recta ſuper rectam conſiſtens duos efficit angulos vel rectos, vel duobus rectis æquales.

40 Rectæ lineæ A D altera quædam recta CB inſiſtat, duos cum illa efficiens angulos CBA, CBD. Dico, hujuſmodi angulos vel rectos eſſe, vel ſummam æquare duorum rectorum, ſi ambo ſimul ſumantur. Euclid. lib. 1. prop. 13.

Demonſtratio.

Recta namque CB vel ad perpendiculum incumbit rectæ AD, vel oblique. Si primum: ergo rectus eſt uterque angulus ABC, CBD (b). Si vero oblique incumbit, quemadmodum reipſa linea BE inſiſtit rectæ AD, educatur ex puncto B recta BC (c), quæ ipſi A D ſit perpendicularis. Fig. 17. Tab. I.

B 2 Igitur

(a) §. 14. (b) §. 22. (c) §. 29.

Igitur duo anguli ABC, CBD erunt recti (a). Tres autem anguli ABC, CBE, EBD æquales ſunt duobus ABC, CBD (b). Ergo tres ABC, CBE, EBD æquales ſunt duobus rectis. Eſt autem angulus ABE æqualis duobus ABC, CBE (c). Ergo addito communi EBD, erunt duo ABE, EBD æquales tribus ABC, CBE, EBD (d); cumque, ut jam oſtenſum eſt, tres ABC, CBE, EBD valeant duos rectos, duo quoque ABE, EBD duobus rectis æquales erunt (e). Igitur recta ſuper rectam, &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Cognita quantitate unius duorum angulorum, qui deinceps poſiti ſunt, alterius quoque magnitudo innoteſcet.

41 Cum enim ambo ſimul ſumti valeant duos rectos, unius quantitate cognita, quod relinquitur ad duos rectos, erit alterius magnitudo, quæ ignoratur.

COROLLARIUM II.

Si plures rectæ lineæ in eodem plano eidem rectæ ad idem punctum inſiſtunt, omnes anguli, qui ab illis ſiunt, ſunt æquales duobus rectis.

42 Sunt enim duo recti in plures æqualiter, vel inæqualiter, ut patet, diviſi.

COROLLARIUM III.

Duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo in puncto ſecantes quatuor angulos vel rectos, vel quatuor rectis æquales conſtituunt.

Fig. 14. Tab. I. 43 Nimirum quatuor anguli AEC, CEB, BED, AED, qui a duabus rectis ſeſe mutuo ſecantibus in puncto E producun-

(a) §.23. (b) Synop.Alg.§.256. (c) Ibid.§.256. (d) Ibid.§ 265. (e) Ibid.§.262.

ducuntur, vel ſunt recti, vel omnes ſimul ſummam adæquant quatuor rectorum. Etenim tam duo AEC, CEB, quam duo AED, DEB vel recti ſunt, vel ſummam duorum rectorum conficiunt.

COROLLARIUM IV.

Omnes anguli, qui in eodem plano circa idem punctum conſiſtunt, ſi ſimul accipiantur, æquales ſunt quatuor rectis.

44 Sunt enim quatuor recti anguli in illos plures æqualiter, vel inæqualiter diviſi.

COROLLARIUM V.

Integer circulus ex aliquo puncto deſcriptus, eſt menſura quatuor angulorum rectorum, quorum omnium apices in illo puncto conſiſtunt.

45 Circulus nimirum AEDC metitur quatuor rectos angulos ABC, CBD, DBE, EAB conſiſtentes circa punctum B, ex quo circulus ipſe deſcriptus eſt. Etenim circa idem punctum B, & in eodem plano nonniſi quatuor anguli recti haberi poſſunt (a). Fig. 19. Tab. I.

COROLLARIUM VI.

Menſura anguli recti eſt quadrans circuli ex illius apice deſcripti. Menſura anguli obtuſi eſt arcus major quadrante; & anguli acuti eſt arcus quadrante circuli minor.

46 Arcus nimirum ABE, qui metitur angulum rectum ABE, erit quadrans circuli AEDC. Cum enim circa punctum B nonniſi quatuor anguli recti haberi poſſint (b), eoſque ſimul metiatur integer circulus AEDC (c); omneſque anguli recti ſint inter ſe æquales (d), æquales erunt arcus, quos Fig. 19. Tab. I.

(a) §. 41. (b) §. 44. (c) §. 45. (d) §. 37.

quos ſinguli ſubtendunt (a). Æquales ergo erunt arcus AB, ED, DC, CA, ſi fuerint recti quatuor anguli ABE, EBD, DBC, CBA; ac proinde eorum quilibet erit quadrans circuli. Quoniam vero angulus obtuſus ABG eſt major recto ABE (b), & angulus acutus EBG eſt recto minor (c), illius menſura erit arcus AEG major quadrante AE; hujus vero menſura erit arcus EG minor quadrante EGD. Arcus enim hujuſmodi ſunt directe inter ſe, ut ipſi anguli (d).

SCHOLION.

47 Cum quilibet circulus dividatur communiter in 360. partes æquales, quæ *gradus* dicuntur, & quilibet *gradus* in 60. partes itidem æquales, quæ vocantur *minuta*, & ſic deinceps, remanet, menſuram anguli recti eſſe arcum circuli 90. *graduum*; menſuram anguli obtuſi eſſe arcum, cujus magnitudo 90. *gradus* ſuperat; menſuram vero anguli acuti eſſe arcum, qui minus, quam 90. *gradus*, comprehendit. Univerſaliter autem tot *graduum*, & *minutorum* eſſe datum quemcumque angulum, quot *gradus*, & *minuta* in arcu ab illo ſubtenſo continentur.

COROLLARIUM VII.

Duæ rectæ lineæ nequeunt habere ſegmentum commune.

48 Si namque fieri poteſt, rectæ ſint duæ lineæ ABC; ABD commune ſegmentum habentes AB. Ex communi ergo puncto B erigatur recta BE (e). Igitur per hoc *theorema* duo anguli ABE, EBC æquales erunt duobus rectis, quemadmodum etiam duo ABE, EBD; cum utraque ABC, ABD poſita ſit recta; ac proinde duo ABE, EBC æquales erunt duobus ABE, EBD (f). Sublato propterea communi angulo ABE, erit reliquus EBC reliquo EBD æqualis, pars toti (g). Id autem repugnat (h). Ergo duæ lineæ ABC, ABD commune habentes ſegmentum AB, non ſunt rectæ; adeoque &c.

Fig. 20. Tab. I.

THEO-

(a) §. 14. (b) §. 21. (c) §. 20. (d) §. 14. (e) §. 29. (f) Syn. Alg. §. 259. (g) Ibid. §. 266. (h) Ibid. §. 257.

THEOREMA II.

Si ad datam rectam lineam ad datum in ea punctum duæ rectæ lineæ ex oppoſitis partibus ductæ, duos angulos vel rectos, vel duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt illæ duæ rectæ lineæ.

49 Ad datam rectam lineam EB, ad datum in ea punctum B, ducantur ex oppoſitis partibus A, C duæ rectæ lineæ AB, CB, quæ cum ipſa EB duos efficiant angulos ABE, EBC vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico, lineas AB, CB eſſe in directum poſitas, ſeu unam eandemque rectam conſtituere ABC. Euclid. lib. 1. p.14.

Demonſtratio.

Si namque, ſtante hac hypotheſi, duæ lineæ AB, CB non ſunt in directum poſitæ, producatur in directum earum altera AB, eaque cadat in D (a). Igitur cum linea ABD ſit recta, duo anguli ABE, EBD æquales erunt duobus rectis (b). Sunt autem per hypotheſim æquales duobus rectis etiam duo ABE, EBC. Ergo duo ABE, EBD erunt duobus ABE, EBC æquales (c). Sublato propterea communi ABE, erit reliquus EBD æqualis reliquo EBC (d). Hoc autem repugnat (e). Ergo recta AB in directum producta nequit cadere extra rectam BC; eruntque proinde duæ AB, BC in directum poſitæ. Itaque ſi ad datam rectam lineam &c. quod erat oſtendendum. Fig. 21. Tab. I.

THEOREMA III.

Ad datam rectam lineam e puncto in illa accepto una tantum recta perpendicularis ad eandem partem excitari poteſt.

50 Eſto recta AD, in qua ſumatur punctum B. Ex ipſo autem

(a) §.33. (b) §.40. (c) Syn.Alg.§.259. (d) Ibid.§.266. (e) Ibid.§.257.

autem erigatur recta perpendicularis BC. Dico, ex eodem puncto B excitari non poſſe aliam rectam ad eandem partem C, quæ ſit ipſi AD perpendicularis, atque cum perpendiculari BC in eodem plano conſiſtat.

Demonſtratio.

Si namque fieri poteſt, eſto altera perpendicularis BE. Igitur cum utraque CB, EB ſit rectæ AD perpendicularis, uterque angulus CBD, EBD erit rectus (a). Omnes autem anguli recti ſunt inter ſe æquales (b). Ergo angulus EBD æqualis erit angulo CBD. Eſt autem angulus EBD pars anguli CBD, ut patet. Ergo pars æquabit totum: quod cum repugnet (c), nequeunt duæ rectæ CB, EB ſimul ad perpendiculum incumbere eidem rectæ AD. Itaque ad datam rectam lineam &c. quod erat oſtendendum.

Fig.17. Tab. I.

THEOREMA IV.

Anguli ad verticem oppoſiti, qui a duabus rectis lineis ſeſe mutuo ſecantibus producuntur, ſunt inter ſe æquales.

51 Duæ rectæ lineæ AB, CD ſeſe mutuo ſecent in puncto E. Dico, angulos CEB, AED, ſicuti etiam CEA, BED, qui ſunt ad verticem oppoſiti, eſſe inter ſe æquales.

Euclid. lib. I. p.15.

Demonſtratio.

Duo anguli AEC, CEB valent duos rectos, quemadmodum etiam duo AEC, AED (d); cum utraque AB, CD poſita ſit recta. Igitur duo AEC, CEB æquales ſunt duobus EAC, AED (e). Ablato propterea communi AEC, erit reliquus CEB reliquo AED æqualis (f). Eodem modo oſtendam, duos quoque CEA, BED æquales eſſe inter ſe. Itaque anguli ad verticem oppoſiti &c. quod erat oſtendendum.

Fig.14. Tab.I.

COROL-

(a) §.23. (b) §.37. (c) Synop.Alg. §.257. (d) §.40. (e) Synop.Alg. §.259. (f) Ibid. §.266.

COROLLARIUM I.

Si unus quatuor angulorum, qui a duabus rectis ſeſe mutuo ſecantibus producuntur, fuerit rectus, ceteri quoque omnes erunt recti.

52 Ut ſi angulus ABE productus a rectis AC, EF ſeſe mutuo ſecantibus, fuerit rectus, recti quoque erunt reliqui EBC, CBF, ABF. Si namque rectus eſt angulus ABE, rectus quoque erit alter ad verticem oppoſitus FBC. Duo autem ABE, EBC valent duos rectos, quemadmodum etiam duo ABF, FBC (a). Ergo ſi duo ABE, FBC fuerint recti, recti ſimiliter erunt duo EBC, ABF. Rectus enim eſt angulus, qui duorum angulorum rectorum eſt medietas. Fig. 21. Tab. I.

COROLLARIUM II.

Si recta perpendiculariter alteri rectæ inſiſtens infra illam producatur, ſegmentum quoque inferius eidem rectæ ad perpendiculum incumbet.

53 Si nimirum recta EB perpendicularis fuerit rectæ AC, directe producta recta EB in F, ſegmentum quoque BF erit eidem AC perpendiculare. Si namque recta EB rectæ AC perpendicularis fuerit, rectus erit uterque angulus ABE, EBC (b). Ergo recti quoque erunt duo ABF, FBC, utpoite illis ad verticem oppoſiti. Igitur recta ſimiliter BF erit ipſi AC perpendicularis (c). Fig. 21. Tab. I.

THEOREMA V.

Si quatuor rectæ lineæ ex eodem puncto exeuntes, & in eodem plano exiſtentes, angulos ad verticem oppoſitos æquales fecerint, erunt duæ ex adverſo in directum poſitæ.

54 Ex eodem puncto E in eodem plano quatuor egrediantur rectæ EC, EB, EA, ED conſtituentes in ipſo plano

C qua-

(a) §.40. (b) §.23. (c) §.24.

quatuor angulos AEC, CEB, BED, AED, quorum duo ad verticem oppoſiti CEB, AED, ſicuti etiam duo AEC, DEB, ſint æquales. Dico, rectas AE, EB eſſe in directum poſitas, quemadmodum etiam rectas EC, ED.

Demonſtratio.

Cum enim duo anguli CEB, AED æquales ſint inter ſe, ſicuti etiam duo AEC, DEB, erunt duo CEB, BED ſimul ſumti æquales duobus AED, AEC ſimul pariter acceptis (a). Fig. 14. Tab. I. Quatuor autem anguli CEB, BED, DEA, AEC æquales ſunt quatuor rectis (b). Ergo tam duo CEB, BED, quam duo DEA, AEC duobus rectis æquales erunt. Duæ igitur rectæ CE, ED, quemadmodum etiam duæ AE, EB, erunt in directum poſitæ (c). Quamobrem ſi quatuor rectæ lineæ &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si in data recta linea punctum ſumatur, ex quo duæ rectæ hinc inde educantur, quæ angulos ad verticem oppoſitos æquales conſtituant, illæ duæ rectæ lineæ erunt in directum poſitæ.

55 Ut ſi ex puncto E ſumto in recta CD duæ hinc inde educantur rectæ EB, EA, quæ angulos ad verticem oppoſitos CEB, AED, vel duos BED, AEC æquales conſtituant, erunt duæ EB, EA in directum poſitæ. Fig. 14. Tab. I. Cum enim duo CEB, BED æquales ſint duobus rectis, quemadmodum etiam duo CEA, AED (d), erunt duo CEB, BED æquales duobus CEA, AED (e). Igitur ſublatis æqualibus CEB, AED, erit reliquus AEC reliquo BED æqualis (f); ac proinde duæ AE, EB erunt per hoc *theorema* in directum poſitæ.

ELE-

(a) Syn. Alg. §. 265. (b) §. 41. (c) §. 49. (d) §. 40. (e) Syn. Alg. §. 259. (f) Ibid. §. 266.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER IV.

De rectis lineis parallelis.

HActenus lineas rectas conſideravimus, quatenus una cum alia ſimul in puncto concurrit, nunc eædem lineæ conſiderandæ ſunt, quatenus ita ſe habent, ut ſimul in puncto concurrere minime queant.

DEFINITIO I.

1 *LIneæ rectæ parallelæ vocantur illæ, quæ ubique æqualiter inter ſe diſtant*. Tales ſunt rectæ AB, CD. Quippe ita ſe habent, ut eadem ſemper ſit diſtantia earum a ſe mutuo, ubicumque ea ſumatur. Fig. 21. Tab. I.

COROLLARIUM I.

2 *Perpendiculares omnes inter duas rectas parallelas comprehenſæ*, ut rectæ *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *ſunt inter ſe æquales*. Ab his enim ſumitur diſtantia ipſarum rectarum parallelarum AB, CD, ut clarius ex dicendis patebit. Fig. 22. Tab. I.

COROLLARIUM II.

3 *Duæ rectæ lineæ inter ſe parallelæ nequeunt ſimul in puncto concurrere, quamvis directe in infinitum producantur*. Hujuſmodi ſiquidem concurſus haberi nequit, niſi earum diſtantia a ſe mutuo continuo minuatur, ac proinde quin tollatur earum paralleliſmus.

Digitized by Google

DEFINITIO II.

4 Contra vero *illæ duæ rectæ lineæ parallelæ non ſunt, quarum diſtantia a ſe mutuo eadem ubique non eſt, ſed ex una parte* Fig. 23. Tab. I. *continuo decreſcit*. Hujuſmodi ſunt duæ rectæ AB, CD. Manifeſte namque conſtat, eandem non eſſe ubique ipſarum a ſe mutuo diſtantiam, ſed ad partes B, D eam continuo minui.

COROLLARIUM.

5 *Rectæ lineæ non parallelæ, ſi utrinque in directum producantur, ex una parte ad ſe mutuo continuo accedunt, ſeu proximiores fiunt; ex altera vero a ſe mutuo magis continuo recedunt, magiſque divergentes a ſe mutuo redduntur.*

DEFINITIO III.

6 Recta EF incidens in duas rectas parallelas AB, CD plures efficit angulos, qui diverſo nomine deſignantur. Duo Fig. 24. Tab. I. enim BGH, GHD, quemadmodum etiam duo AGH, GHC dicuntur *interni ad eaſdem partes*. Duo GHD, AGH, ſicuti & duo BGH, GHC, vocantur *alterni*. Duo EGB, DHF, aliique eodem modo ſe habentes, dicuntur *externi ad eaſdem partes*. Angulus EGB dicitur *externus*; angulus vero GHD *internus ad eaſdem partes*.

Axioma fundamentale.

Duæ rectæ lineæ nequeunt ſpatium concludere:

7 Si namque rectæ ſunt, vel in nullo puncto concurrunt; vel ſi concurrunt in puncto ex una parte, ex altera continuo a ſe mutuo recedunt.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA I.

Si in duas rectas lineas recta quædam incidens angulos internos ad eandem partem duobus rectis minores fecerit, parallelæ non erunt illæ duæ rectæ lineæ.

8 Recta EF incidente in duas rectas AB, CD, duo anguli interni ad eaſdem partes BGH, GHD minores ſint duobus rectis. Dico, lineas AB, CD non eſſe inter ſe parallelas.

Demonſtratio.

Cum enim duo anguli BGH, AGH æquales ſint duobus rectis, quemadmodum etiam duo GHC, GHD (a), ſi duo BGH, GHD minores fuerint duobus rectis, duo reliqui AGH, GHC duos rectos ſuperabunt; ac proinde majores erunt duobus BGH, GHD. Igitur magis diſtracta ſunt a recta GH ſegmenta AG, CH, quam ab eadem recta diſtracta ſint ſegmenta BG, DH earundem rectarum AB, CD (b). Ergo duæ rectæ AB, CD non ubique æqualiter a ſe mutuo diſtant; atque ideo non ſunt inter ſe parallelæ (c). Igitur ſi in duas rectas &c. quod erat oſtendendum. Fig. 23. Tab. I.

THEOREMA II.

Si in duas rectas lineas recta quædam incidens angulos internos ad eaſdem partes duobus rectis æquales fecerit, parallelæ erunt illæ duæ rectæ lineæ.

9 In duas rectas lineas AB, CD incidat recta quædam EF; ſintque duo anguli interni ad eaſdem partes BGH, GHD duobus rectis æquales. Dico, rectas AB, CD eſſe inter ſe parallelas. Euclid. lib. I. p. 28.

Demon-

a) Lib. III. §. 40. (b) Ibid. §. 9. (c) §. 4.

Demonſtratio.

Enimvero cum duo anguli AGH, BGH, quemadmodum etiam duo CHG, GHD, valeant duos rectos (a), ſi duo BGH, GHD æquales fuerint duobus rectis, duo quoque AGH, CHG duobus rectis æquales erunt. Itaque ſi duæ rectæ lineæ AB, CD non ſunt parallelæ, ſi ad unam eandemque partem ambæ producantur, ſibi mutuo continuo accedent; contra vero ex alia continuo a ſe mutuo recedent (b). Id autem contingere nequit in duabus rectis AB, CD. Quandoquidem cum duo anguli BGH, GHD æquales ſint duobus AGH, CHG (c), quod tam illi, quam iſti, ut modo oſtenſum eſt, valeant duos rectos, vel utrinque continuo ſibi mutuo proximiores fient, ſi in directum producantur, adeo ut tandem ſimul utrinque jungantur, ſicque ſpatium concludant, quod plane repugnat (d); vel continuo magis magiſque a ſe mutuo utrinque recedent, quod earum rectitudini ad evidentiam adverſatur. Ergo duæ rectæ lineæ AB, CD hujuſmodi erunt, ut in directum utrinque productæ, eamdem ſemper a ſe mutuo diſtantiam ſervent; ac proinde ſint inter ſe parallelæ (e). Si in duas ergo rectas lineas &c. quod erat oſtendendum.

Fig. 24. Tab. I.

COROLLARIUM I.

Si duæ rectæ lineæ eidem rectæ perpendiculares fuerint, erunt inter ſe parallelæ.

10 Ut ſi duæ rectæ lineæ AB, CD perpendiculares fuerint eidem rectæ EF, illæ erunt inter ſe parallelæ. Cum enim hoc ipſo rectus ſit uterque angulus ABD, CDB (f), duo anguli interni ABD, CDB producti a recta EF in duas incidente AB, CD, erunt recti. Ergo *per hoc theorema* duæ rectæ AB, CD ſunt parallelæ.

Fig. 25. Tab. I.

COROL-

(a) Lib. III. §. 40. (b) §. 5. (c) Syn. Alg. § 259. (d) §. 7. (e) §. 1. (f) Lib. III. § 22.

Digitized by Google

COROLLARIUM II.

Si recta in duas rectas incidente, angulus externus æqualis fuerit interno oppoſito ad eaſdem partes, parallelæ erunt illæ duæ rectæ lineæ.

11 Duæ nimirum AB, CD parallelæ erunt inter ſe, ſi angulus externus EGB æqualis fuerit interno oppoſito ad eaſdem partes GHD. Enimvero cum duo anguli EGB, BGH æquales ſint duobus rectis (a), erunt quoque hoc ipſo duo anguli interni BGH, GHD duobus rectis æquales; adeoque &c. Fig. 24. Tab. I. Euclid. lib. I. p. 28.

COROLLARIUM III.

Si recta in duas rectas incidente, anguli alterni æquales fuerint, parallelæ erunt illæ duæ rectæ lineæ.

12 Si nempe incidente recta EF in duas rectas AB, CD, æquales fuerint anguli alterni AGH, GHD, duæ AB, CD erunt inter ſe parallelæ. Duo enim anguli interni BGH, GHD erunt hoc ipſo æquales duobus rectis; cum duo anguli AGH, BGH valeant duos rectos (b). Fig. 24. Tab. I. Euclid. lib. I. p. 27.

THEOREMA III.

Recta incidens in duas rectas parallelas angulos internos ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficit.

13 In duas rectas parallelas AB, CD recta incidat EF. Dico, angulos internos ad eaſdem partes BGH, GHD eſſe duobus rectis æquales. Euclid. lib. I. p. 29.

Demon-

(a) Lib III. §. 40. (b) Ibid. §. 40.

Demonſtratio.

Duo ſiquidem anguli BGH, GHD nequeunt excedere duos rectos, neque a duobus rectis deficere. Non primum: quia cum duo AGH, BGH, ſicuti etiam duo GHC, GHD,
Fig.24. valeant duos rectos (a), adeoque omnes AGH, BGH,
Tab. I. GHC, GHD ſimul ſumti quatuor rectis ſint æquales, ſi duo BGH, GHD majores eſſent duobus rectis, reliqui duo AGH, CHG a duobus rectis deficerent; ac proinde rectæ AB, CD non eſſent parallelæ (b). Non ſecundum; quia tunc duæ rectæ AB, CD parallelæ non eſſent inter ſe (c), quod eſt contra hypotheſim. Duo ergo anguli BGH, GHD æquales ſunt duobus rectis, ſi duæ lineæ AB, CD parallelæ inter ſe fuerint; adeoque recta incidens &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Recta in duas rectas parallelas incidens, externum angulum interno oppoſito ad eaſdem partes æqualem efficit.

14 Incidente nimirum recta EF in rectas parallelas AB, CD, angulus externus EGB æqualis erit interno oppoſito ad eaſdem partes GHD. Cum enim *per hoc theorema* duo angu-
Fig.24. Tab. I. li BGH, GHD valeant duos rectos, æquales erunt duobus
Euclid. EGB, BGH, qui duos itidem rectos adæquant (d). Igitur
lib. 1. ablato communi angulo BGH, erit reliquus EGB reliquo
p. 29. GHD æqualis (e).

COROLLARIUM II.

Recta incidens in duas rectas parallelas alternos angulos æquales efficit.

15 Ut ſi duæ AB, CD, in quas recta incidit EF, parallelæ fuerint, anguli alterni AGH, GHD erunt æquales. Etenim

(a) Lib. III. §. 40. (b) §. 8. (c) §. 8. (d) Lib. III. §. 40. (e) Syn. Alg. §. 266.

enim duo anguli BGH, GHD, utpote æquales duobus re- Fig. 14.
ctis æquales ſunt duobus AGH, BGH, qui pariter duos re- Tab. I. Euclid.
ctos adæquant (a). Demto igitur communi BGH, erit re- p. 29.
liquus AGH reliquo GHD æqualis (b). lib. 1.

COROLLARIUM III.

Recta uni parallelarum perpendicularis alteri quoque eſt perpendicularis.

16 Ut ſi recta *a b* perpendicularis fuerit rectæ CD, cui
parallela ſit recta AB, erit quoque ipſi AB perpendicularis. Fig. 22.
Cum enim *per hoc theorema* duo anguli *c a b*, *a b d* valeant duos Tab. I.
rectos, quemadmodum etiam duo A*a b*, C*b a*, nequit angulus *a b d*, ſicuti etiam angulus *a b*C, eſſe rectus, quin rectus quoque ſit uterque angulus A*a b*, *c a b*; ac proinde non poteſt recta *a b* ad perpendiculum incumbere rectæ CD, quin pariter rectæ AB ad perpendiculum inſiſtat (c).

THEOREMA IV.

Quæ eidem rectæ ſunt parallelæ, inter ſe quoque ſunt parallelæ.

17 Duæ rectæ lineæ AB, EF parallelæ ſint eidem rectæ Euclid.
CD. Dico, rectas AB, EF inter ſe quoque eſſe parallelas. lib. 1. p. 30.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi duæ AB, CD ſunt parallelæ, duo anguli interni ab eaſdem partes B*b*H, *b* HD producti a recta incidente *b* K, æquales erunt duobus rectis (d). Eadem ratione duo ſimiliter DHK, HKF duos rectos æquabunt. Quatuor igitur anguli B*b*H, *b*HD, DHK, HKF æquales
erunt quatuor rectis. Duo autem *b*HD, DHK valent duos Fig. 16.
rectos (e). Ergo reliqui duo B*b*K, *b*KF duobus rectis æ- Tab. I.
qua-

D

(a) Lib.III.§.40. (b) Syn.Alg.§.266. (c) Lib.III.§.24. (d) §.13. (e) Lib.III.§.40.

quales erunt : Sunt autem interni ad eaſdem partes : Ergo duæ rectæ AB , EF ſunt parallelæ (a). Igitur quæ eidem rectæ &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA V.

Quæ uni rectarum parallelarum eſt parallela, alteri quoque eſt parallela.

18 Sint duæ rectæ parallelæ AB, CD , quarum uni CD parallela ſit recta EF . Dico , rectam EF alteri quoque AB eſſe parallelam.

Demonſtratio.

Cum enim ex hypotheſi angulus DHK ſit æqualis angulo B*b*H(b), erunt duo B*b*K, *b*KF æquales duobus DHK, Fig.26. Tab. I. HKF . Sunt autem duo anguli DHK, HKF æquales duobus rectis (c), quod rectæ CD, EF poſitæ ſint parallelæ . Ergo duo ſimiliter anguli B*b*K , *b*KF duobus rectis æquales erunt (d). Sunt autem interni ad eaſdem partes . Ergo duæ EF, AB erunt parallelæ (e) . Igitur quæ uni rectarum &c. quod erat oſtendendum.

ELE-

(a) §.11. (b) §.14. (c) §.13. (d) Syn.Alg. §.262. (e) §.9.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER V.

De triangulis planis rectilineis.

A *Lineis* ad *ſuperficiem*, quæ eſt ſecunda ſpecies quantitatis continuæ permanentis, gradum facimus. Hæc figuras omnes planas complectitur. Quoniam vero omnium figurarum, quæ pluribus lineis continentur, maxime ſimplex *triangulum* eſt, ejuſque cognitio ad cæterarum ſymptomata demonſtranda requiritur, *triangulorum* naturam, & affectiones priori loco exponemus.

DEFINITIO I.

1 *Superficies eſt magnitudo duplici tantummodo dimenſione, longitudinis nempe, & latitudinis, prædita*. Quæ diximus de *puncto*, & *linea*, de *ſuperficie* quoque intelligenda ſunt, videlicet *ſuperficiem* haberi, ſi in corporibus ad longitudinem, & latitudinem dumtaxat attentio fiat. Hinc Proclus, *ſuperficiei*, inquit, *cognitionem nos habere dicunt, cum agros dimetimur, eorumque extremitates juxta longitudinem, & latitudinem diſtinguimus. Senſum vero quemdam capere, umbras inſpicientes. Cum enim ipſæ ſine craſſitudine ſint, eoquod interiorem terræ partem penetrare non poſſunt, longitudinem tantum, atque latitudinem habent.*

SCHOLION.

2 Diviſio ſuperficiei eſt in *planam*, *curvam*, & *mixtam*, ut de linea diximus, eodemque modo hæc *ſuperficierum* genera explicantur.

DEFINITIO II.

3 *Figura* generatim ſumta *eſt magnitudo pluribus dimenſionibus prædita, undique clauſa*. Dicitur *pluribus dimenſionibus prædita*, ut linea finita a figurarum ſerie excludatur. Sicuti ergo duo tantum ſunt genera magnitudinum, quæ plures dimenſiones habent, *ſuperficies* nimirum, & *corpus*, ita duo tantum ſunt prima figurarum genera, ſcilicet figura *plana*, & *ſolida*.

COROLLARIUM.

4 *Repugnat extenſio figurata, quæ ſit infinita*. Infinitum enim eſt, quod caret terminis. Figura vero neceſſario poſtulat, ut terminis comprehendatur.

SCHOLION.

5 Geometricarum figurarum præſtantia tanta eſt, ut, ſi Vitruvio credimus, cum Ariſtippus ad Rhodienſium littus naufragio ejectus, Geometrica ſchemata conſpexiſſet, lætus ad ſocios exclamaſſe dicitur: *Bene ſperemus; hominum enim veſtigia video*.

DEFINITIO III.

6 *Figura plana eſt ſuperficies una, vel pluribus lineis terminata*. Porro licet etiam ſuperficies *curva*, & *mixta* una, vel pluribus lineis undique contineri queat; attamen *figura plana* non dicitur, niſi plana ſuperficies undique clauſa.

SCHOLION.

7 Habita ratione linearum, quibus *figura plana* terminatur, dividi ſolet *figura plana* in *rectilineam*, *curvilineam*, & *mixtam*.

DEFI-

DEFINITIO IV.

8 *Figura plana rectilinea eſt illa, quæ rectis lineis terminatur. Curvilinea, quæ una tantum, vel pluribus lineis curvis; mixtilinea vero, quæ partim recta, partim curva linea comprehenditur.* Figura plana *rectilinea* eſt ABC; *curvilinea* EDCA; *mixta* vero *d e* B. Fig. 17. Fig. 19. Fig. 6. Tab. I.

DEFINITIO V.

9 *Latera figuræ dicuntur illæ lineæ, quibus ipſa figura continetur.* Sic tres rectæ lineæ AB, BC, CA ſunt latera figuræ ABC. Fig. 17. Tab. I.

DEFINITIO VI.

10 *Perimeter figuræ*, qui etiam illius *ambitus* dicitur, *ſunt omnes illæ lineæ ſimul ſumtæ, quibus figura clauditur.* Sic tres lineæ AB, BC, CA, ſi ſumantur ſimul, ſunt *perimeter* figuræ rectilineæ ABC. Curva quoque linea CAED eſt *perimeter* figuræ curvilineæ CAED. Fig. 17. Fig. 19. Tab. I.

DEFINITIO VII.

11 *Area figuræ totum illud ſpatium vocatur, quod figura perimetro comprehenditur.* Sic area figuræ ABC eſt ſpatium contentum tribus rectis AB, BC, CA, quæ ipſius figuræ *perimetrum* conſtituunt. Fig. 17. Tab. I.

DEFINITIO VIII.

12 *Baſis figuræ rectilineæ eſt illud latus, cui figura ipſa inſiſtit.* Talis eſt latus EF in figura DEF. Illi namque figura DEF incumbit. Fig. 18. Tab. I.

DEFI-

DEFINITIO IX.

13 *Vertex figuræ eſt illud perimetri punctum, quod baſi oppoſitum eſt, atque ab illa maxime diſtat*. Sic punctum G eſt *vertex* figuræ GHK, ſicuti etiam punctum A in figura ABC.
Fig. 29. Fig. 30. Tab. I. Utrumque enim opponitur ipſarum figurarum baſibus HK, BC, & ab illis maxime diſtat.

DEFINITIO X.

14 *Altitudo figuræ eſt recta linea ducta a vertice ipſius figuræ ad ejuſdem baſim, eique ad perpendiculum incumbens*. Sic recta
Fig. 27. Tab. I. AD eſt altitudo figuræ ABC. Cadit enim a *vertice* A in *baſim* BC ipſius figuræ, eſtque ipſi baſi perpendicularis.

SCHOLION.

15 Obſervandum tamen quammaxime eſt, rectam lineam, penes quam ſumitur figuræ altitudo, quandoque uni ex lateribus ipſius figuræ congruere, nec raro extra baſim cadere.
Fig. 29. Fig. 30. Tab. I. Primum patet in figura GHK, cujus altitudo diverſa non eſt a latere GH. Alterum vero contingit in figura ABC, cujus altitudo eſt recta AE, quæ extra illius baſim BC cadit. Tunc itaque, ut altitudo figuræ determinetur, ipſius figuræ baſis in directum producenda eſt, eaque, veluti baſis figuræ, eſt conſideranda.

DEFINITIO XI.

16 *Figura rectilinea æquilatera dicitur illa, quæ æqualibus rectis lineis continetur*. Hujuſmodi eſt figura ABC. Æqualia
Fig. 27. Tab. I. enim ſunt inter ſe tria ipſius latera AB, BC, CA.

DEFINITIO XII.

17 *Figura rectilinea vocatur æquiangula, cum omnes anguli ſunt*

ſunt inter ſe æquales. Talis eſt figura ABC; cum æquales ſint inter ſe tres ipſius anguli ABC, BCA, CAB. Fig. 27. Tab. I.

DEFINITIO XIII.

18 *Duæ figuræ rectilineæ dicuntur inter ſe mutuo æquilateræ, cum ita ſe habent, ut latera unius æqualia ſint lateribus alterius, alterum alteri*. Ut ſi latus AB figuræ ABD æquale fuerit lateri *ab* figuræ *abd*, latus BD lateri *bd*, & latus AD lateri *ad*, duæ figuræ ABD, *abd* erunt *inter ſe mutuo æquilateræ*. Fig. 1. Fig. 2. Tab. II.

DEFINITIO XIV.

19 *Duæ figuræ rectilineæ inter ſe mutuo æquiangulæ dicuntur, cum anguli unius æquales ſunt angulis alterius, alter alteri*. Sic duæ figuræ ABD, *abd* erunt *inter ſe mutuo æquiangulæ*, ſi angulus ABD æqualis fuerit angulo *abd*, angulus BDA angulo *bda*, & angulus DAB angulo *dab*. Fig. 1. Fig. 2. Tab. II.

DEFINITIO XV.

20 *Illa figura rectilinea dicitur regularis, quæ ſimul æquilatera eſt, & æquiangula*. Talis eſt figura ABC; cum omnia ipſius latera æqualia ſint inter ſe, quemadmodum etiam omnes ipſius anguli. Fig. 27. Tab. I.

DEFINITIO XVI.

21 *Figura irregularis e contrario vocatur illa, quæ vel latera habet inæqualia inter ſe, vel angulos inæquales, vel nec angulos, nec latera habet æqualia*. Hujuſmodi eſt figura DEF. Fig. 28. Tab. I.

DEFINITIO XVII.

22 *Triangulum planum eſt figura plana tribus tantum lineis terminata, totidemque angulos continens*. Si omnia ipſius latera ſint lineæ rectæ, triangulum dicitur *rectilineum*; *curvilineum*,

ſi omnia

ſi omnia ſint lineæ curvæ; *mixtilineum* vero, ſi alterum ipſorum laterum ſit linea recta, alterum curva.

SCHOLION.

23 Triangulum planum *rectilineum*, de quo dumtaxat in præſens agimus, ſi ſpectetur penes latera, dividitur in *æquilaterum*, *iſoſceles*, & *ſcalenum*. Si vero conſideretur penes angulos, quos continet, dividitur in *rectangulum*, *amblygonium*, & *oxygonium*.

DEFINITIO XVIII.

24 *Triangulum æquilaterum dicitur illud, cujus tria latera ſunt inter ſe æqualia*. Hujuſmodi eſt triangulum ABC. Æqualia namque ſunt inter ſe tria ipſius latera AB, BC, CA.

Fig. 27. Tab. I.

DEFINITIO XIX.

25 *Triangulum iſoſceles eſt, cujus duo latera ſunt æqualia*, ut triangulum DEF, cujus duo latera DE, DF ſunt æqualia.

Fig. 28. Tab I.

COROLLARIUM.

26 *Omne triangulum æquilaterum eſt iſoſceles*. Habet enim crura æqualia.

SCHOLION.

27 Licet quodlibet latus trianguli rationem baſis habere poſſit, attamen in triangulo iſoſcele illud latus ſumitur pro baſe, quod reliquis inæquale eſt. In triangulo vero æquilatero perinde eſt omnino, quodnam latus pro baſe ſumatur.

DEFI-

DEFINITIO XX.

28 *Triangulum ſcalenum eſt illud, cujus omnia latera ſunt inæqualia*, ut triangulum GHK. Fig.29. Tab. I.

DEFINITIO XXI.

29 *Triangulum rectangulum vocatur illud, quod unum trium angulorum habet rectum*. Hujuſmodi eſt triangulum GHK, Fig.29. Tab. I.
cum rectus ſit ipſius angulus GHK.

DEFINITIO XXII.

30 *Illud latus in triangulo rectangulo* hypotenuſa *dici ſolet, quod recto ipſius angulo opponitur. Duo vero reliqua ipſius latera* cateti *vocantur*. Sic in triangulo rectangulo GHK *hypotenuſa* eſt latus GK, quod opponitur angulo recto GHK; *cateti* vero ſunt duo ipſius latera GH, HK. Fig.29. Tab. I.

DEFINITIO XXIII.

31 *Triangulum amblygonium eſt illud, cujus unus trium angulorum obtuſus eſt*, ut triangulum ABC, quod obtuſum habet Fig.30. Tab. I.
angulum ABC.

DEFINITIO XXIV.

32 *Triangulum oxygonium eſt illud, cujus omnes anguli ſunt acuti*, ut triangulum DEF. Fig.28. Tab. I.

DEFINITIO XXV.

33 *Illæ magnitudines dicuntur ſibi mutuo congruere, quarum termini concidunt, ſi illarum una alteri applicetur*. Nimirum duo plana ſibi mutuo congruunt, ſi unum alteri ſuperpoſitum illud non excedat, neque ab illo excedatur.

AXIOMA I.

Quæ ſibi mutuo perfecte congruunt, ſunt inter ſe æqualia:

34 Poteſt enim unum illorum, ſalva quantitate, alteri ſubſtitui.

SCHOLION.

35 Converſum hujus axiomatis, videlicet *æqualia ſibi mutuo congruere*, verum univerſaliter non eſt. Perſpicuum enim fiet, plures extare magnitudines æquales inter ſe, quæ tamen ſibi mutuo minime congruunt.

COROLLARIUM I.

36 *Figuræ, quæ ſibi mutuo congruunt, ſunt inter ſe mutuo æquilateræ, & æquiangulæ*. Æquales enim ſunt tum penes latera, tum penes angulos.

COROLLARIUM II.

37 *Figuræ rectilineæ inter ſe mutuo æquilateræ, & æquiangulæ ſunt æquales*. Congruunt enim ſibi mutuo, ſi illarum una alteri ſuperponatur.

AXIOMA II.

Lineæ rectæ æquales ſibi mutuo perfecte congruunt;

38 Cum enim extrema unius coincidant cum extremis alterius, niſi illarum una alteri tota congrueret, duæ ipſæ rectæ lineæ ſpatium concluderent, quod plane repugnat (a).

AXIO-

(a) Lib. IV. §. 7.

AXIOMA III.

Anguli rectilinei, qui æquales ſunt inter ſe, ſibi mutuo perfecte congruunt.

39 Si namque anguli ſunt æquales, eorum crura erunt æque diſtracta (a). Congruentibus propterea illorum apicibus, & uno crure unius ſuper unum alterius cadente, alterum quoque ſuper alterum cadat, neceſſe eſt. Quandoquidem ſi ſecus, ipſi anguli non eſſent æquales (b).

THEOREMA I.

Tres anguli cujuslibet trianguli plani rectilinei ſimul ſumti, æquales ſunt duobus rectis.

40 Eſto triangulum planum rectilineum ABC. Dico, tres ipſius angulos ABC, BCA, BAC ſimul ſumtos ſummam duorum rectorum conficere, ſive duobus rectis eſſe æquales. Euclid. lib. I. prop. 32.

Demonſtratio I.

Per verticem A ipſius trianguli tranſeat recta DE baſi BC parallela. Igitur angulus ACB æqualis erit angulo EAC, & angulus ABC angulo DAB (c). Quamobrem ſi alter angulus BAC duobus DAB, EAC addatur, tres anguli ABC, BAC, ACB æquales erunt tribus DAB, BAC, CAE (d). Tres autem anguli DAB, BAC, CAE ſummam duorum rectorum conficiunt (e). Ergo tres quoque ABC, BAC, ACB duobus rectis æquales erunt (f); adeoque &c. Fig. 11. Tab. I.

Demonſtratio II.

In directum producto latere BC trianguli ABC in D,

E 2 ex pun-

(a) Lib. III. §. 10.
(b) Ibid. §. 9.
(c) Lib. IV. §. 15.
(d) Synop. Alg. §. 265.
(e) Lib. III. §. 42.
(f) Synop. Alg. §. 262.

ex puncto C erigatur recta CE lateri AB ipſius trianguli pa-
Fig. 12. rallela. Angulus ergo ABC æqualis erit angulo ECD (a),
Tab. I. & angulus BAC angulus ACE (b); atque adeo tres anguli ABC, BAC, ACB æquales erunt tribus ECD, ACE, ACB (c). Sunt autem tres ECD, ACE, ACB duobus rectis æquales (d). Ergo tres quoque ABC, BAC, ACB duobus rectis æquales erunt (e). Tres itaque anguli &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

41 Hujus eximii theorematis inventio, ſi Eudemo veteri Geometræ fides habenda eſt, Pythagoræ accepta refertur: Frequentiſſime porro per univerſam Matheſim adhibetur, atque de eo ſæpe fit mentio ab Ariſtotele, ut ſcilicet exemplum perfectiſſimæ demonſtrationis exhibeat.

COROLLARIUM I.

Omnis trianguli plani rectilinei duo quicumque anguli minores ſunt duobus rectis.

42 Tres enim requiruntur, ut valor duorum rectorum habeatur.

COROLLARIUM II.

Quilibet angulus trianguli regularis adæquat tertiam partem duorum rectorum.

43 Cum enim omnes anguli trianguli regularis æquales ſint inter ſe (f), omneſque ſimul ſumti, ſummam duorum rectorum conficiant (g), comperta res eſt, eorum quemlibet æquare tertiam partem duorum rectorum.

COROL-

(a) Lib. IV. §. 14.
(b) Ibid. §. 15.
(c) Syn. Alg. §. 265.
(d) Lib. III. §. 42.
(e) Syn. Alg. §. 262.
(f) §. 20.
(g) §. 40.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

Si unus trium angulorum unius trianguli rectus eſt, vel obtuſus, reliqui duo ſunt acuti.

44 Quippe ſi ſecus, tres anguli ipſius trianguli ſimul ſumti ſummam duorum rectorum excederent.

COROLLARIUM IV.

Tres anguli unius trianguli ſimul ſumti æquales ſunt tribus angulis alterius trianguli, ſi illi quoque ſimul ſumantur.

45 Cum enim tam illi, quam iſti valeant duos rectos (a); erunt inter ſe æquales (b).

COROLLARIUM V.

Si duo anguli unius trianguli æquales fuerit duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus reliquo æqualis. Et ſi unus trium angulorum unius trianguli æqualis fuerit uni angulorum alterius trianguli, etiam reliqui duo ſimul erunt reliquis duobus æquales.

46 Si namque æqualibus æqualia demantur, quæ remanent, ſunt æqualia (c).

COROLLARIUM VI.

Si unius trium angulorum unius trianguli rectus fuerit, reliqui duo ſummam conficient unius recti. Et viciſſim, ſi duo anguli ſummam conficiunt unius recti, reliquus erit rectus.

47 Etenim tres ipſi anguli ſimul ſumti, valent duos rectos (d).

COROL-

(a) §.40. (b) Syn.Alg. §.259. (c) Ibid. §.266. (d) §.40.

COROLLARIUM VII.

Si unus trium angulorum unius trianguli reliquis duobus æqualis fuerit, rectus erit, & illi duo ſimul ſumti unum quoque rectum æquabunt.

Euclid. lib. 3. Corol. p.15. 48 Tunc enim valor duorum rectorum angulorum biſariam dividitur. Conſtat autem, medietatem duorum rectorum angulorum valere unum angulum rectum. Ergo &c.

COROLLARIUM VIII.

A dato puncto ad datam rectam lineam una tantum recta perpendicularis duci poteſt.

49 Nimirum a puncto C una tantum recta perpendicularis cadere poteſt in rectam AB. Si namque poteſt fieri, ſint Fig.33. Tab. I. duæ rectæ CD, CE perpendiculares ipſi AB. Igitur uterque angulus CDE, CED erit rectus (a); ac proinde trianguli DCE duo anguli ſummam conficiunt duorum rectorum; quod repugnat (b). Ergo vel alterutra tantum rectarum CD, CE, vel neutra ad perpendiculum incumbit rectæ AB.

THEOREMA II.

Omnis trianguli plani rectilinei uno latere in directum producto, externus angulus duobus internis oppoſitis eſt æqualis.

Euclid. lib. 1. p.14. 50 Trianguli plani rectilinei ABC latus quodcumque BC directe producatur in D. Dico, angulum externum ACD æqualem eſſe duobus angulis internis oppoſitis CBA, CAB ſimul ſumtis.

Demonſtratio I.

Tres anguli ABC, CAB, BCA ſimul ſumti valent duos rectos

(a) Lib.3 §.23. (b) §.41.

recτos (a), quemadmodum etiam duo ACB, ACD (b). Igitur duo anguli ACB, ACD æquales erunt tribus ABC, CAB, BCA (c). Quamobrem ſublato communi ACB, erit reliquus ACD reliquis duobus CAB, CBA æqualis (d); adeoque &c. Fig. 12. Tab. I.

Demonſtratio II.

Ex puncto C educatur recta CE parallela lateri AB. Angulus itaque externus ECD æqualis erit interno oppoſito ABC (e), & angulus ACE alterno BAC (f); adeoque duo ECD, ACE duos ABC, BAC æquabunt. Eſt autem angulus ACD æqualis duobus ACE, ECD (g). Ergo angulus quoque ACD duobus ABC, BAC æqualis erit (h). Omnis itaque trianguli &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Omnis trianguli plani rectilinei uno latere directe producto; externus angulus major eſt interno oppoſito diviſim ab aliis ſumto.

51 Angulus nimirum ACD major eſt tum angulo ABC, tum angulo BAC. Angulus namque ACD utrumque ſimul ABC, BAC adæquat. Euclid. lib. 1. p. 16.

THEOREMA III.

In omni triangulo plano rectilineo angulus ille major eſt, qui majori lateri opponitur. Et viciſſim illud latus eſt majus, quod majorem angulum ſubtendit.

I.

52 In triangulo plano rectilineo ABC eſto latus AC majus latere AB. Dico, angulum quoque ABC ipſi AC oppoſitum Euclid. lib. 1. p. 19.

(a) §. 40. (b) Lib. III. §. 40. (c) Synop. Alg. §. 258. (d) Ibid. §. 266. (e) Lib. IV. §. 14. (f) Ibid. §. 15. (g) Syn. Alg. §. 256. (h) Ibid. §. 261.

ſitum majorem eſſe angulo ACB, qui latus minus AB ſubtendit.

Demonſtratio.

Cum enim latus AC majus ſit latere AB ipſius trianguli ABC, evidens eſt, magis a ſe mutuo diſtracta eſſe latera
Fig. 10. Tab. I. AB, BC, quam latera AC, CB. Ille autem angulus eſt major altero, qui crura magis diſtracta habet (a). Ergo angulus ABC major erit angulo ACB, adeoque &c.

II.

Euclid. lib. 1. p. 18. 53 Viciſſim vero in eodem triangulo plano rectilineo ABC angulus ABC major ſit angulo ACB. Dico, latus AC, quod majori angulo ABC opponitur, majus eſſe latere AB, quod minori angulo ACB ſubtenditur.

Demonſtratio.

Si namque angulus ABC major eſt angulo ACB ejuſdem trianguli ABC, magis a ſe mutuo diſtracta erunt latera AB, BC, quam latera AC, CB (b). Ergo latera AB, BC majorem, ut patet, intercipient lineam, quam latera AC, CB; eritque propterea latus AC majus latere AB. Itaque in omni triangulo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

In triangulo rectangulo majus latus eſt hypotenuſa. In triangulo vero amblygonio majus latus eſt illud, quod angulo obtuſo opponitur.

54 In triangulo namque *rectangulo* angulus rectus eſt reliquis duobus major, quemadmodum etiam angulus obtuſus in triangulo *amblygonio*. Etenim ſi in uno triangulo unus angulus rectus eſt, vel obtuſus, reliqui ſunt acuti (c)

COROL-

(a) Lib. III. §. 9. (b) Ibid. (c) §. 44.

COROLLARIUM II.

In triangulo ſcaleno tres anguli ſunt inter ſe inæquales;

55 Siquidem triangulum ſcalenum habet tria latera inter ſe inæqualia (a).

COROLLARIUM III.

Latera trianguli, cujus anguli inæquales ſint inter ſe; ſunt inæqualia.

56 Majori enim angulo majus latus opponitur.

COROLLARIUM IV.

Recta perpendicularis minima eſt omnium rectarum, quæ ab eodem puncto ad eandem rectam duci poſſunt.

57 Ducantur enim a puncto C ad rectam AB quamplures rectæ lineæ CD, CE, CF, quarum CD ipſi AB ad perpendiculum inſiſtat. Igitur cum angulus CDE ſit rectus (b). angulus CED erit acutus (c), adeoque minor angulo CDE (d). Quamobrem *per hoc theorema* latus CE majus erit latere CD. Eadem ratione recta CF eandem CD ſuperabit, omnesque aliæ, quæ a puncto C in rectam AB cadere poſſunt, ipſa CD majores erunt. Perpendicularis itaque eſt omnium minima. Fig. 11. Tab. I.

SCHOLION I.

58 Ex eo, quod recta perpendicularis ſit omnium minima, liquido apparet, cur magnitudinis cujuſcunque menſura penes *perpendicularem* unice ſumatur. Menſura namque debet eſſe certa, & determinata apud omnes, hujuſmodi nimirum, ut diverſitas in ejus acceptione contingere mini-

F me

(a) §.28. (b) Lib.III.§.23. (c) §.44. (d) Lib.III.§.20.

me poſſit. Manifeſtum eſt autem, ſolam *perpendicularem* eſſe hujuſmodi, hoc ipſo quod eſt omnium earum minima, penes quas menſura ſumi poteſt; adeoque &c.

SCHOLION II.

59 Hinc deducitur, tres tantum eſſe dimenſiones, videlicet *longitudinis*, *latitudinis*, & *profunditatis*; ac proinde tres tantum ſpecies quantitatis continuæ permanentis, *lineam* nimirum, *ſuperficiem*, & *corpus*. Tres enim dumtaxat rectæ lineæ per idem punctum duci poſſunt, quæ ſint ſibi invicem perpendiculares (a).

THEOREMA IV.

Anguli, qui ſunt ad baſim trianguli iſoſcelis, æquales ſunt inter ſe, & productis lateribus, anguli quoque infra baſim ſunt æquales.

Fig. 14. Tab. I. Eſto triangulum iſoſceles ABC, cujus nimirum duo latera AB, AC ſint æqualia.

I.

Euclid. lib. 1. p. 5. 60 Dico primo, angulos ABC, ACB, qui ſunt ad baſim BC, eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Etenim, ſi fieri poteſt, inæquales ſint anguli ABC, ACB, ſitque angulus ABC major angulo ACB. Igitur latus AC majus erit latere AB (b). Hoc autem eſt contra hypotheſim. Ergo anguli ABC, ACB non ſunt inæquales, ſed æquales.

II.

(a) Vide Clavium Com. in Sphæram Joan. a S. Boſco pag. mihi 14. (b) §. 53.

II.

61 In directum producantur latera AB, AC. Dico, angulos quoque DBC, ECB infra baſim BC eſſe æquales.

Demonſtratio.

Quoniam tam duo ABC, DBC, quam duo ACB, BCE valent duos rectos (a), duo ABC, CBD æquales erunt duobus ACB, BCE (b). Oſtenſum eſt autem, etiam duos ABC, ACB eſſe æquales. Ergo illis ſublatis, qui remanent DBC, ECB, erunt æquales (c). Itaque anguli &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Triangulum æquilaterum eſt etiam æquiangulum.

62 Si nimirum tria latera AB, BC, CA trianguli ABC ſunt inter ſe æqualia, etiam tres ipſius anguli erunt æquales. Ob æqualitatem namque laterum AB, AC duo anguli ABC, ACB ſunt æquales (d). Eadem ratione æquales ſunt etiam duo ABC, CAB. Ergo tres anguli ABC, ACB, CAB ſunt æquales (e). Fig. 14. Tab. I.

COROLLARIUM II.

Omne triangulum æquilaterum eſt regulare.

63 Eſt enim æquilaterum, & æquiangulum (f).

COROLLARIUM III.

Tres anguli trianguli æquilateri ſunt acuti.

64 Cum enim triangulum æquilaterum ſit regulare (g),

F 2 quili-

(a) Lib. III. §. 40.
(b) Syn. Alg. §. 259.
(c) Ibid. §. 266.
(d) §. 60.
(e) Syn. Alg. §. 259.
(f) §. 62.
(g) §. 63.

quilibet angulus ipſius trianguli erit tertia pars duorum rectorum (a). Ergo eorum quilibet erit minor recto, adeoque acutus.

THEOREMA V.

Si trianguli plani rectilinei duo anguli æquales fuerint; etiam latera eos ſubtendentia erunt æqualia.

65 Trianguli plani rectilinei ABC duo anguli ABC, ACB ſint inter ſe æquales. Dico, latera quoque AB, AC, quæ illis reſpondent, eſſe æqualia. Fig. 14. Tab. I.

Demonſtratio.

Quandoquidem eſto, ſi fieri poteſt, latus AB majus latere AC. Conſectarium eſt, ut angulus ACB, utpote qui majori lateri opponitur, angulum ABC excedat (b). Poſuimus autem angulos ABC, ACB inter ſe æquales. Ergo latera AB, AC non ſunt inæqualia, ſed æqualia. Euclid. lib. 1. p. 6.

COROLLARIUM I.

Omne triangulum æquiangulum eſt etiam æquilaterum:

66 Ut ſi triangulum ABC fuerit æquiangulum, erit etiam æquilaterum. Si namque duo anguli ABC, ACB ſunt inter ſe æquales, æqualia itidem erunt duo ipſius latera AB, AC (c). Eandem ob cauſam æqualia erunt duo latera AC, CB. Quæ autem ei ſunt æqualia, inter ſe ſunt æqualia (d). Ergo duo quoque latera AB, CB erunt æqualia; atque adeo triangulum ABC erit æquilaterum. Fig. 27. Tab. I.

COROL-

(a) §. 48.
(b) §. 52.
(c) §. 65.
(d) Syn. Alg. §. 259.

Digitized by Google

COROLLARIUM II.

Omne triangulum æquiangulum eſt regulare.

67 Si namque omne triangulum æquiangulum eſt etiam æquilaterum, habet quidquid requiritur, ut figura regularis dici poſſit (a).

COROLLARIUM III.

Quilibet angulus trianguli æquianguli eſt acutus.

68 Cum enim triangulum æquiangulum ſit regulare (b); quilibet angulus ipſius trianguli adæquat unam tertiam partem duorum rectorum (c); adeoque &c.

THEOREMA VI.

Omnis trianguli plani rectilinei duo quælibet latera reliquo ſunt majora.

69 Eſto triangulum ABC. Dico, duo ipſius latera AC, AB ſimul ſumta rectam conſtituere majorem latere CB. Fig. 35. Tab. I.

Demonſtratio.

In directum producto latere BA, fiat ſegmentum AD æquale lateri AC, & ducatur recta DC. Cum igitur duo latera AC, AD ſint æqualia, æquales erunt anguli ADC, ACD (d). Eſt autem angulus DCB major angulo DCA (e). Ergo major quoque erit angulo ADC (f); ac proinde latus DB, utpote majori angulo oppoſitum, majus erit latere CB (g). Poſuimus autem latus DB æquale duobus CA, AB. Euclid. lib. 1. p. 20.

(a) §. 20. (b) §. 67. (c) §. 43. (d) §. 60. (e) Syn. Alg. §. 257. (f) Ibid. §. 264. (g) §. 53.

AB. Ergo etiam duo CA, AB majora erunt reliquo CB (a). Omnis itaque trianguli &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Linea recta breviſſima eſt omnium linearum eadem extrema habentium.

70 Ab extremo A ad extremum C quamplures ducantur lineæ AC, ABC, ADC, AEC, quarum AC ſit recta. Manifeſtum eſt *ex hoc theoremate*, rectam AC eſſe omnium mi-
Fig. 36. Tab. I. nimam: Etenim ſumto in curva ABC puncto B, ductiſque ad extrema A, C rectis BA, BC, erunt duæ lineæ AB, BC majores, ſi ſimul ſumantur, recta AC. Eſt autem curva ABC major rectis AB, BC, ut patet, & facile oſtendetur, comparando curvam AB cum recta AB, & curvam BC cum recta BC. Ergo curva ABC major quoque erit recta AC. Eodem modo ratiocinare de aliis quibuſcumque curvis, quæ a puncto A ad punctum C duci poſſunt; adeoque &c.

SCHOLION.

71 Hinc diſtantia unius puncti ab altero in eodem plano conſiderari debet penes rectam ab uno ad alterum ductam. Hæc enim, cum ſit ceterarum omnium, quæ intra ipſa puncta contineri poſſunt, breviſſima, erit quoque certa, fixa, & ſtabilis, prout ad menſuram requiritur.

THEOREMA VII.

Si in triangulo plano rectilineo punctum aliquod accipiatur, a quo ad extrema baſis duæ rectæ ducantur, iſtæ minores erunt lateribus ipſius trianguli, ſed majorem angulum continebunt.

Euclid. lib. 1. p. 21. 72 Eſto triangulum planum rectilineum DCB, in quo punctum aliquod accipiatur.

Primus

(a) Syn. Alg. § 264.

Primus caſus.

Et quidem primo in latere DB, ſitque illud punctum A. Dncatur autem ab hoc puncto ad extremum C baſis CB ipſius trianguli recta AC. Dico, duo latera AC, AB minora eſſe lateribus DC, DB ipſius trianguli, ſed angulum CAB majorem eſſe angulo CDB. Fig. 17. Tab. I.

Demonſtratio.

Duo latera CD, DA trianguli CAD majora ſunt reliquo CA (a). Quamobrem addito communi AB, erunt duo CD, DB majora duobus CA, AB (b). Eſt autem angulus CAB externus; internus vero oppoſitus angulus CDA, ut patet. Ergo angulus CAB major erit angulo CDB (c); adeoque &c.

Secundus caſus.

Sumatur modo punctum in area trianguli, ſitque punctum O, a quo ad extrema baſis CB ducantur rectæ OC, OB. Dico, rectas OC, OB minores eſſe lateribus CD, DB, ſed angulum COB majorem eſſe angulo CDB.

Demonſtratio.

Recta CO directe producta in A (d), erunt duo latera OA, AB majora reliquo OB (e); quocirca addito CO, erunt duo CA, AB majora duobus CO, OB (f). Sunt autem duo CD, DB majora duobus CA, AB, ut modo demonſtravimus. Ergo duo CD, DB majora quoque erunt duobus CO, OB (g). Rurſus angulus CAB major eſt angulo CDB. Angulus autem COB eandem ob cauſam major eſt angulo CAB (h). Ergo a fortiori angulus COB angulum CDB ſuperabit. Itaque ſi in triangulo plano &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) §.69. (c) §.51. (e) §.72. (g) Ibid. §.264.
(b) Syn.Alg.§.268. (d) Lib.III. §.33. (f) Syn.Alg.§.268. (h) §.51.

THEOREMA VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint; alterum alteri; habuerint autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus lateribus continentur, & baſim baſi æqualem habebunt, eritque totum triangulum toti triangulo æquale.

Sint duo triangula plana rectilinea ABD, *abd*, quorum Euclid. lib. I. p. 4. duo latera AB, *a b* æqualia ſint inter ſe, quemadmodum etiam duo AD, *ad*. Angulus quoque BAD angulum *b a d* adæquet, qui æqualibus lateribus continentur.

I.

73 Dico primo, baſim quoque BD baſi *bd* eſſe æqualem:

Demonſtratio.

Cum enim anguli BAD, *bad* poſiti ſint æquales, æque Fig. I. Fig. 2. Tab. I. diſtracta erunt latera BA, AD * *ba*, *ad* (a). Sunt autem latera ipſa *reſpective* inter ſe æqualia per hypotheſim. Ergo æquales rectas intercipient, nempe baſis BD baſim *b d* æquabit.

II.

74 Dico ſecundo, triangulum ABD æquale eſſe triangulo *abd*.

Demonſtratio.

Cum enim latera unius trianguli æqualia ſint lateribus alterius, alterum alteri, & angulus BAD angulo *bad*, ſi unum triangulum alteri ſuperponatur, congruet angulus BAD angulo

(a) Lib. III. §. 10.

Digitized by Google

gulo *bad* (a), latus AB lateri *ab*, & latus AD lateri *ad* (b), necnon baſis BD baſi *bd*, cum etiam ipſæ oſtenſæ ſint æquales. Hinc congruet quoque angulus ABD angulo *abd*, & angulus ADB angulo *adb*, ac proinde totum triangulum ABD toti triangulo *abd*. Æqualia autem ſunt inter ſe, quæ ſibi mutuo perfecte congruunt (c). Ergo totum triangulum ABD æquale erit toti triangulo *abd*. Itaque ſi duo triangula &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM:

Rectæ, quæ rectas æquales, & parallelas ad eaſdem partes conjungunt, ſunt inter ſe æquales.

75 Ut ſi duæ rectæ æquales, & parallelæ AB, CD jungantur rectis AC, BD, duæ AC, BD erunt inter ſe æquales. Ducta enim ab extremo puncto A ad extremum oppoſitum D recta AD, duo anguli alterni BAD, CDA erunt æquales (d). Poſitæ ſunt autem æquales duæ rectæ AB, CD, & recta AD communis eſt utrique triangulo BAD, ADC. Ergo baſes quoque, ſive rectæ AC, BD erunt æquales (e).

Fig. 3. Tab. II.

Euclid. lib. 1. p. 33.

THEOREMA IX.

In triangulo iſoſcele recta ducta ab angulo verticali ad baſim, ſi ipſum angulum bifariam dividat, ejuſdem quoque baſim dividet bifariam.

76 Eſto triangulum iſoſceles ABC, ab cujus verticali angulo BAC, qui æqualibus lateribus AB, AC continetur, ducatur ad baſim BC recta AD, quæ angulum ipſum verticalem BAC bifariam dividat. Dico, rectam AD bifariam quoque ſecare baſim BC.

Fig. 4. Tab. II.

G Demon-

(a) §.39. (b) §.38. (c) §.34. (d) Lib. IV. §.15. (e) §.73.

Demonſtratio.

Cum enim duo latera AB, AC ſint æqualia per hypotheſim, & latus AD ſit utrique triangulo BAD, DAC commune, ſi ponatur angulus BAD æqualis angulo DAC, duo triangula BAD, DAC habebunt duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continentur, æqualem. Ergo etiam baſis BD æquabit baſim DC (a). Igitur in triangulo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno angulo ad latus oppoſitum, ſi ipſum angulum bifariam dividat, latus quoque ipſum dividet bifariam.

77 Omne enim triangulum æquilaterum eſt iſoſceles (b); cumque duo quælibet ipſius latera ſint æqualia (c), quilibet angulus pro vertice ſumi poteſt.

THEOREMA X.

In triangulo iſoſcele recta ducta ab angulo verticali ad baſim, eique ad perpendiculum incumbens, baſim ipſam bifariam dividit.

78 Ab angulo verticali BAC trianguli iſoſcelis BAC ad baſim BC ducatur recta AD, quæ ipſi baſi BC perpendiculariter incumbat. Dico, rectam AD bifariam dividere ipſam baſim BC.

Demonſtratio.

Cum enim ob hypotheſim duo anguli ADB, ADC ſint recti

(a) §.73. (b) §.26. (c) §.24.

recti (a), æquales erunt inter ſe (b). Sunt autem etiam duo ABC, ACB inter ſe æquales (c). Ergo reliquus quoque BAD reliquo DAC æqualis erit (d); atque adeo recta AD verticalem angulum BAC bifariam dividet. Igitur bifariam quoque dividit baſim BC (e). In triangulo itaque iſoſcele recta &c. quod erat oſtendendum. Fig. 4. Tab. II.

COROLLARIUM I.

In triangulo iſoſcele recta ducta ab angulo verticali ad baſim, eique ad perpendiculum incumbens, dividit bifariam ipſum angulum, atque adeo etiam totum triangulum.

79 Demonſtravimus enim, æquales eſſe inter ſe angulos BAD, DAC, in quos verticalis BAC a recta AD baſi BC ad perpendiculum inſiſtente dividitur. Quamobrem, cum latus AB ſit æquale lateri AC (f), & latus AD ſit commune utrique triangulo ADB, ADC, triangulum quoque ADB erit triangulo ADC æquale (g). Fig. 4. Tab. II

COROLLARIUM II.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno ſuorum angulorum ad latus oppoſitum, eique perpendiculariter incumbens, dividit bifariam tum ipſum angulum, tum ipſum latus, necnon totum ipſum triangulum.

80 Etenim, cum omne triangulum æquilaterum ſit iſoſceles (h), quæ modo oſtenſa ſunt de triangulo iſoſcele, de æquilatero itidem ſunt intelligenda.

(a) Lib. III. §. 23. (b) Ibid. §. 37. (c) §. 60. (d) §. 46. (e) §. 76. (f) §. 25. (g) §. 74. (h) §. 26.

COROLLARIUM III.

Recta, quæ metitur altitudinem trianguli iſoſcelis; & æquilateri, cadit intra ipſius latera.

81 Altitudo namque utriuſque trianguli ſumitur penes rectam, quæ ab angulo verticali cadit in baſim, eique ad perpendiculum incumbit (a).

THEOREMA XI.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri; habuerint autem etiam baſim baſi æqualem, angulum quoque angulo, qui æqualibus reſpective lateribus continentur, æqualem habebunt, eritque totum triangulum toti triangulo æquale.

Fig. 1. Fig. 2. Tab. II. Sint duo triangula plana rectilinea ABD, *abd*, quorum duo latera AB, *ab* æqualia ſint inter ſe, ſicuti etiam duo AD, *ad*. Baſes quoque BD, *bd* ſint inter ſe æquales.

I.

82 Dico primo, angulos BAD, *bad*, qui æqualibus *reſpective* lateribus continentur, eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Poſita namque æqualitate laterum AB, *ab** AD, *ad*; nequeunt baſes BD, *bd* eſſe æquales inter ſe, quin diſtractio laterum AB, AD adæquet diſtractionem laterum *ab*, *ad*; ac proinde quin anguli BAD, *bad* ſint inter ſe æquales (b). Baſes autem BD, *bd* poſitæ ſunt æquales. Ergo anguli quoque BAD, *bad* inter ſe æquales erunt; adeoque &c.

II.

(a) §. 14. (b) Lib. III. §. 20.

Digitized by Google

II.

83 Dico ſecundo, totum triangulum BAD æquale eſſe toti triangulo *bad*.

Demonſtratio.

Cum enim latera ſint *reſpective* inter ſe æqualia, ſit nimirum AB = *ab*, BD = *bd*, DA = *da*, congruent ſibi mutuo tam duo AB, *ab*, quam duo BD, *bd*, ſicuti etiam duo DA, *da* (a). Ergo totum triangulum ABD congruet toti triangulo *abd* (b); eruntque proinde ipſa triangula inter ſe æqualia (c). Si ergo duo triangula &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Omnia triangula inter ſe mutuo æquilatera, ſunt æqualia.

84 Oſtenſum eſt enim, ea ſibi mutuo congruere, ſi unum alteri ſuperponatur.

COROLLARIUM II.

Duo triangula inter ſe mutuo æquilatera, ſunt etiam inter ſe mutuo æquiangula, æquales nimirum habent angulos, qui æqualibus lateribus opponuntur.

85 Non enim poteſt perimeter trianguli BAD congruere perimetro trianguli *bad*, ſicuti alter alteri congruit, ſi triangula ſint æquilatera inter ſe mutuo, quin eorum anguli itidem ſibi mutuo congruant, alter alteri, qui æqualibus lateribus opponuntur, videlicet ABD, *abd** BDA, *bda** BAD, *bad*. Ergo eorum anguli erunt æquales, alter alteri (d); ac proinde &c. Fig. 1. Fig. 2. Tab. II.

COROL-

(a) §. 38. (b) §. 33. (c) §. 34. (d) §. 34.

COROLLARIUM III.

In triangulo iſoſcele recta ducta ab angulo verticali ad baſim, eamque bifariam dividens, ipſum quoque angulum dividit bifariam.

86 Si nimirum in triangulo iſoſcele BAC recta AD ducta ab angulo verticali BAC ad baſim BC, ipſam bifariam divi-
Fig. 4. Tab. II. dat, bifariam quoque dividet angulum BAC. Enimvero cum duo latera AB, AC ſint æqualia (a), & latus AD ſit commune utrique triangulo BAD, DAC, poſita æqualitate duorum BD, DC, duo triangula BAD, DAC erunt inter ſe mutuo æquilatera (b). Ergo erunt etiam inter ſe mutuo æquiangula, habebuntque angulos BAD, DAC æqualibus lateribus oppoſitos, inter ſe æquales (c).

COROLLARIUM IV.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno angulorum ad latus oppoſitum, ipſumque latus bifariam dividens, angulum quoque ipſum dividit bifariam.

87 Omne ſiquidem triangulum æquilaterum eſt iſoſceles (d).

COROLLARIUM V.

Rectæ, quæ duas rectas æquales, & parallelas ad eaſdem partes conjungunt, ſunt inter ſe parallelæ.

88 Ut ſi duæ rectæ AB, CD æquales inter ſe, & paralle-
Euclid. lib 1. p. 28. læ, jungantur duabus rectis AC, BD, ipſæ quoque AC, DB erunt parallelæ. Cum enim duæ AC, BD ſint hoc ipſo æquales (e), ſi ab extremo A ad oppoſitum D ducatur recta AD, duo triangula ABD, ADC erunt inter ſe mutuo æquila-

(a) §.25. (b) §.18. (c) §.85. (d) §.26. (e) §.75.

Digitized by Google

æquilatera (a), adeoque etiam æquiangula, eritque angulus ADB angulo DAC æqualis (b). Sunt autem alterni, ut patet. Ergo duæ rectæ AC, BD erunt parallelæ (c).

THEOREMA XII.

In triangulo iſoſcele recta ducta ab angulo verticali ad baſim, eamque biſariam dividens, eſt ipſi baſi perpendicularis.

89 Ab angulo verticali BAC trianguli iſoſcelis BAC ducatur ad baſim BC recta AD, quæ baſim ipſam biſariam dividat. Dico, rectam AD eſſe baſi BC perpendicularem.

Demonſtratio.

Etenim ob hypotheſim duo triangula BAD, DAC erunt inter ſe mutuo æquilatera (d). Igitur angulus ADB æquabit angulum ADC (e), qui ſunt æqualibus lateribus AB, AC oppoſiti (f). Duo autem anguli ADB, ADC valent duos rectos (g). Ergo uterque erit rectus; ac proinde recta AD ad perpendiculum rectæ BC incumbit (h). In triangulo itaque iſoſcele &c. quod erat oſtendendum. Fig. 4. Tab. II.

COROLLARIUM.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno trium angulorum ad latus oppoſitum, ipſumque biſariam dividens, eſt eidem perpendicularis.

90 Triangulum quippe æquilaterum eſt iſoſceles (i), in quo perinde omnino eſt, quodcumque latus pro baſe ſumatur (k).

THEO-

(a) §.18. (b) §.85. (c) Lib.IV. §.12. (d) §.18. (e) §.85. (f) §.25. (g) Lib.III. §.40. (h) Ibid. § 24. (i) §.26. (k) §.27.

THEOREMA XIII.

In triangulo iſoſcele recta ducta ab angulo verticali ad baſim ; ipſumque angulum biſariam dividens , eſt baſi perpendicularis .

91 In triangulo iſoſcele ABC ducatur ab angulo verticali BAC ad baſim BC recta AD , dividens angulum ipſum biſariam . Dico , rectam AD perpendiculariter baſi BC inſiſtere .

Demonſtratio .

Cum enim duo anguli ABC , ACB ſint æquales (a) ; ſicuti etiam duo BAD , DAC per hypotheſim , etiam reliquus BDA reliquo ADC æqualis erit (b) . Duo autem
Fig. 4. Tab.II. ADB , ADC æquales ſunt duobus rectis (c) . Ergo uterque erit rectus ; ac propterea recta AD ad perpendiculum baſi BC incumbet (d) . Itaque in triangulo iſoſcele &c. quod erat oſtendendum .

COROLLARIUM.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno trium angulorum ad latus oppoſitum , ipſumque angulum biſariam dividens , eſt eidem lateri perpendicularis .

92 Omne ſiquidem triangulum æquilaterum eſt iſoſceles (e) , ſimulque æquiangulum (f).

THEO-

(a) §.60. (b) §.46. (c) Lib.III.§.40. (d) ibid.§.24. (e) §.26. (f) §.62.

THEOREMA XIV.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint; alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quæ æqualibus angulis adjacent, vel quæ uni æqualium angulorum ſubtenduntur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, eritque totum triangulum toti triangulo æquale.

I.

93 Duo anguli ABD; *abd* triangulorum BAD; *bad* æquales ſint inter ſe, ſicuti etiam duo ADB, *adb*. Unum quoque latus unius trianguli unum latus alterius adæquet, Fig. 1. Fig. 2. Tab. II.

Primus caſus.

Et quidem primo æqualia ſint latera, quæ æqualibus angulis adjacent, nimirum BD, *bd*. Dico, latus quoque AB æquale eſſe lateri *ab*, & latus AD lateri *ad*. Euclid. lib. 1. p. 26.

Demonſtratio.

Cum enim latera BD, *bd* ſint æqualia; congruent ſibi mutuo, ſi eorum unum alteri ſuperponatur (a). Eandem quoque ob cauſam congruet angulus ABD angulo *abd*, & angulus ADB angulo *adb* (b). Ergo latus AB congruet lateri *ab*, & latus AD lateri *ad*, necnon apex A apici *a*. Quippe ſi ſecus, anguli illi ſibi mutuo haudquaquam congruerent. Æqualia autem ſunt inter ſe, quæ ſibi mutuo congruunt (c). Ergo duo latera AB, *ab* ſunt inter ſe æqualia; ſicuti etiam duo AD, *ad*.

(a) §. 38. (b) §. 39. (c) §. 34.

Secundus caſus.

Æqualia modo ſint duo latera AB, *ab*, quæ æqualibus angulis ADB, *adb* adjacent. Dico, etiam reliqua latera eſſe reliquis lateribus æqualia, videlicet latus BD lateri *bd*, & latus DA lateri *da*.

Demonſtratio.

Enimvero, cum ex hypotheſi duo anguli ABD, ADB æquales ſint duobus *abd*, *adb*, etiam reliquus BAD reliquo *bad* æqualis erit (a). Æqualia igitur latera AB, *ab* æqualibus angulis adjacent. Ergo *per demonſtrationem præcedentem* reliqua latera BD, DA reliquis lateribus *bd*, *da* æqualia erunt, alterum alteri; adeoque &c.

II.

94 Hiſce poſitis dico, totum triangulum ABD toti triangulo *abd* eſſe æquale.

Demonſtratio.

Duo enim triangula ABD, *abd* ſunt inter ſe mutuo æquilatera, ut modo demonſtravimus. Ergo ſunt inter ſe æqualia (b). Itaque ſi duo triangula &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) §. 46. (b) §. 84.

THEOREMA XV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, ſed angulum angulo majorem, qui æqualibus reſpective lateribus continentur, baſis quoque unius baſe alterius major erit.

95 Sint duo triangula plana rectilinea ABD, *abd*, quorum duo latera AB, *ab* æqualia ſint inter ſe, ſicuti etiam duo AD, *ad*. Angulus autem BAD major ſit angulo *bad*. Dico, baſim quoque BD majorem eſſe baſe *bd*. Fig. 5. Fig. 6. Tab.II.

Demonſtratio.

Cum enim angulus BAD major ſit angulo *bad*; diſtracta a ſe mutuo magis erunt duo latera AB, AD, quam duo *ab*, *ad* (a). Sunt autem illa latera *reſpective* inter ſe æqualia. Ergo majorem rectam intercipient duo AB, AD, quam duo *ab*, *ad*; eritque propterea recta BD major, quam recta *bd*. Itaque ſi duo triangula &c. quod erat oſtendendum. Euclid. lib.1. P. 24.

THEOREMA XVI.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint; alterum alteri; & baſim baſe majorem, angulus quoque unius angulo alterius, qui æqualibus lateribus continentur, major erit.

96 Sint duo triangula plana rectilinea ABD, *abd*, quorum duo latera AB, *ab* æqualia ſint inter ſe, ſicuti etiam duo AD, *ad*. Baſis vero BD major ſit baſe *bd*. Dico, angulum BAD angulo *bad* majorem eſſe. Fig. 5. Fig. 6. Tab.II.

H 2 *Demon-*

(a) Lib.III. §. 9.

Demonſtratio.

Euclid. lib. 1. p. 25.

Etenim ſtante illa æqualitate laterum AB, *ab* * AD, *ad*; non poteſt baſis BD ſuperare baſim *bd*, quin magis a ſe mutuo diſtracta ſint duo latera AB, AD, quam duo *ab*, *ad*. Latera autem magis diſtracta majorem angulum continent (a). Ergo angulus BAD major erit angulo *bad*. Si ergo duo triangula &c. quod erat oſtendendum.

(a) Lib. II. §. 5.

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER VI.

De quadrilateris, & polygonis.

TRiangularum figurarum conſequuntur *quadrilatera*, & *polygona*. Cum igitur de *triangulis* ſuperiori libro actum ſit, nunc conſequenter de *quadrilateris*, & *polygonis* eſt agendum.

DEFINITIO I.

1 *QUadrilaterum planum rectilineum eſt figura plana quatuor tantummodo rectis lineis terminata, totidemque angulos continens.* Dividitur autem in *quadratum*, *altera parte longius*, *rombum*, *romboidem*, & *trapezium*.

DEFINITIO II.

2 *Quadratum eſt quadrilaterum, cujus omnia latera æqualia ſunt inter ſe, quemadmodum etiam quatuor ipſius anguli.* Hujuſmodi eſt quadrilaterum ABDC. Fig. 7. Tab II.

COROLLARIUM.

3 *Quadratum eſt figura regularis.* Eſt enim figura æquilatera, & æquiangula.

DEFINITIO III.

4 *Altera parte longius eſt quadrilaterum, cujus omnes anguli*

guli æquales quidem ſunt inter ſe, at ex lateribus oppoſita tan-
Fig. 8. Tab.II. *tum ſunt inter ſe æqualia*. Tale eſt quadrilaterum ABCD. Æquales enim ſunt omnes ipſius anguli. Verum ex lateribus duo tantum AD, BC, ſicuti etiam duo AB, DC, quæ nimirum ſibi mutuo adverſantur, ſunt æqualia.

DEFINITIO IV.

5 *Rombus eſt quadrilaterum habens omnia latera æqualia, & angulos dumtaxat, qui ſunt ex adverſo, æquales*. Hujuſmo-
Fig. 9. Tab.II. di eſt quadrilaterum ABCD. Omnia enim ipſius latera ſunt æqualia; non omnes tamen ipſius anguli ſeſe mutuo adæquant, ſed duo tantum BAD, BCD, ſicuti etiam duo ABC, ADC, qui ſibi mutuo ex adverſo conſiſtunt.

DEFINITIO V.

6 *Romboides eſt quadrilaterum, cujus oppoſita tantum latera ſunt inter ſe æqualia, ſicuti etiam oppoſiti anguli*, ut qua-
Fig. 10. Tab.II. drilaterum ABCD, cujus duo oppoſita latera AD, BC æqualia ſunt inter ſe, quemadmodum etiam duo AB, DC. Duo quoque oppoſiti anguli BAD, BCD * ABC, ADC ſunt ſibi mutuo æquales.

DEFINITIO VI.

7 Reliqua vero ab his quadrilatera, *quorum nempe omnia latera inæqualia ſunt inter ſe, quemadmodum etiam omnes ipſorum anguli, trapezia vocantur*.

DEFINITIO VII.

8 *Parallelogrammum eſt quadrilaterum, cujus oppoſita late-*
Fig 10. Tab.II. *ra ſunt parallela*. Tale eſt quadrilaterum ABCD. Parallela namque ſibi mutuo ſunt tam duo latera AD, BC, quam duo AB, DC, quæ ſibi adverſantur.

DEFINITIO VIII.

9 *Rectangulum eſt parallelogrammum, cujus ſinguli anguli ſunt recti*, ut parallelogrammum ABCD. Fig. 1. Tab. II.

DEFINITIO IX.

10 *Diameter, ſive diagonalis parallelogrammi eſt recta ducta ad oppoſitos parallelogrammi angulos*. Sic recta AD eſt *diameter*, ſeu *diagonalis* parallelogrammi ACDB. Fig. 1. Tab. II.

DEFINITIO X.

11 *Polygonum eſt figura plana pluribus; quam quatuor rectis lineis comprehenſa*. Sicuti autem numerus laterum augeri poteſt in infinitum, ita *polygoni* infinitæ penitus ſunt ſpecies, quæ a laterum numero denominantur. Dicitur enim *pentagonum*, ſi quinque lateribus; *hexagonum*, ſi ſeptem; *decagonum*, ſi decem; *chyliogonum*, ſi 1000.; *myriogonum*, ſi 10000. lateribus polygonum ipſum comprehendatur.

DEFINITIO XI.

12 *Spatia, ſeu intervalla plurium rectarum parallelarum æqualia ſunt inter ſe, ſi rectæ perpendiculares, quæ inter illas cadunt, ſint æquales*. Sic intervalla rectarum parallelarum AB, CD, EF ſunt æqualia; quia perpendiculares GH, KL inter illas comprehenſæ ſunt æquales. Fig. 11. Tab. II.

THEOREMA I.

Quatuor anguli cujuslibet quadrilateri æquales ſunt quatuor rectis.

13 Eſto quadrilaterum ACDB. Dico quatuor ipſius angulos

Fig. 3. Tab.II. angulos ACD ; CDB , DBA , BAC ſummam quatuor rectorum conficere.

Demonſtratio.

Ducta recta AD , ſeu quadrilatero ACDB in duo triangula diviſo , quatuor ipſius anguli ACD , CDB , DBA , BAC æquales ſunt ſex angulis triangulorum ADB , ADC ſimul ſumtis (a) . Hi autem ſex anguli valent quatuor rectos (b) . Ergo quatuor itidem anguli ACD , CDB , DBA , BAD ſunt quatuor rectis æquales (c) . Quatuor itaque anguli &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Omnes anguli quadrati , & quadrilateri oblongi ſunt recti.

14 Cum enim omnes anguli tam quadrati , quam quadrilateri , quod dicitur *altera parte longius* , æquales ſint inter ſe (d) ; omneſque ſimul ſumti valeant quatuor rectos , eorum quilibet neceſſario erit rectus.

COROLLARIUM II.

Altitudo quadrati , & quadrilateri oblongi coincidit cum uno ſuorum laterum.

15 Altitudo nimirum quadrati ABDC erit ipſius latus
Fig. 7. CD , vel AB . Enimvero cum uterque angulus CDB ,
Fig. 8. ABD ſit rectus (e) , utrumque latus CD , AB ad per-
Tab.II. pendiculum baſi BD inſiſtit (f) ; atque adeo pro illius altitudine ſumi poteſt (g) . Idipſum dicito de altitudine quadrilateri oblongi ABCD.

COROL-

(a) Syn.Alg. § 256. (b) Lib.V. §.40. (c) Syn.Alg. §.262. (d) §.2. & 4. (e) §.14. (f) Lib.III. §. 24. (g) Lib.V. §.24.

COROLLARIUM III.

Quatuor anguli unius quadrilateri, ſi ſumantur ſimul, æquales ſunt quatuor angulis alterius quadrilateri ſimul itidem ſumtis.

16 Videlicet quatuor anguli quadrilateri ABCD ſimul ſumti, æquales ſunt quatuor angulis ſimul itidem ſumtis quadrilateri ABCD. Sunt enim tam illi, quam iſti quatuor rectis æquales (a), & quæ eidem æqualia ſunt, inter ſe pariter ſunt æqualia (b). Fig. 9. Fig. 10. Tab. II.

COROLLARIUM IV.

Si tres anguli unius quadrilateri æquales fuerint tribus angulis alterius quadrilateri, etiam reliquus erit reliquo æqualis.

17 Quandoquidem ſi æqualibus æqualia demantur, quæ remanent, ſunt æqualia (c).

COROLLARIUM V.

Omnia quadrata ſunt inter ſe mutuo æquiangula.

18 Cum enim anguli omnium quadratorum ſint recti (d), & omnes anguli recti ſint inter ſe æquales (e), omnia quadrata erunt inter ſe mutuo æquiangula (f).

THEOREMA II.

Omnis parallelogrammi qui ex adverſo conſiſtunt anguli, & latera, ſunt inter ſe æqualia.

Quadrilaterum ABCD ſit parallelogrammum, habeat

(a) §.13. (b) Syn.Alg.§.239. (c) Ibid.§.266. (d) §.14. (e) Lib.III.§.37. (f) Lib.V.§.19.

Fig. 10. Tab. II. nimirum oppoſita latera AB, CD, ſicuti etiam AD, BC; ſibi mutuo parallela.

I.

Euclid. lib. 1. p. 34. 19 Dico primo, oppoſitos ipſius angulos BAD, BCD, quemadmodum etiam ABC, ADC eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Cum enim latera AD, BC ſit parallela, duo anguli DAB, ABC æquales erunt duobus rectis (a). Eandem ob cauſam duobus rectis æquales erunt etiam duo BAD, ADC; cum duo quoque latera AB, DC ſint ſibi mutuo parallela. Duo igitur anguli DAB, ABC æquales ſunt duobus BAD, ADC (b). Quamobrem ſublato communi BAD, erit reliquus ABC reliquo ADC æqualis (c). Eodem modo oſtendam, etiam duos BAD, BCD eſſe æquales; adeoque &c.

II.

Fig. 3. Tab. II. 20 Dico ſecundo, oppoſita latera AB, CD, ſicuti etiam AC, BD parallelogrammi ACDB eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.

Ducta diagonali AD, anguli alterni tam BAD, ADC producti ab ipſa diagonali AD, quatenus incidit in rectas parallelas AB, CD, quam ADB, DAC, qui fiunt ab eadem incidente in rectas parallelas BD, AC erunt æquales (d). Duo ergo triangula ADB, ADC habent duos angulos BAD, BDA duobus angulis CDA, CAD æquales, alterum alteri, qui communi lateri adjacent AD. Ergo æqualia itidem erunt ipſorum latera, quæ æqualibus angulis adverſantur, erit nempe latus AB æquale lateri

(a) Lib.IV.§.13. (b) Syn.Alg.§.259. (c) Ibid.§.266. (d) Lib.IV.§.15.

Digitized by Google

teri CD, & latus BD lateri AC (a). Itaque omnis parallelogrammi, qui ex adverſo conſiſtunt &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Diagonalis parallelogrammi ipſum dividit in duo triangula æqualia.

21 Æqualia nempe ſunt duo triangula ADB, ADC, in quæ parallelogrammum ACDB dividitur a ſua diagonali AD. Cum enim latus AB æquale ſit lateri CD, latus BD lateri AC, & latus AD ſit commune utrique triangulo ADB, ADC, duo triangula ADB, ADC erunt inter ſe mutuo æquilatera (b). Ergo erunt quoque inter ſe mutuo æqualia (c). Fig. 1. Tab.II. Euclid. lib. 1. p. 34.

COROLLARIUM II.

Si unus angulus parallelogrammi rectus fuerit, omnes ipſius anguli erunt recti.

22 Ut ſi angulus parallelogrammi ABCD fuerit rectus, reliqui ſimiliter ipſius anguli BCD, CDA, DAB erunt recti. Enimvero ſi angulus ABC eſt rectus, rectus quoque erit etiam angulus illi oppoſitus ADC, utpote ipſi ABC æqualis (d). Quatuor autem anguli ABC, BCD, CDA, DAC æquales ſunt quatuor rectis (e). Ergo etiam duo DAB, BCD erunt duobus rectis æquales. Duo autem anguli DAB, BCD æquales ſunt inter ſe (f). Ergo uterque erit rectus. Fig. 2. Tab.II.

(a) Lib.V.§.92.
(b) Ibid. §.88.
(c) Ibid. §.84.
(d) §.19.
(e) §.13.
(f) §.19.

COROLLARIUM III.

Recta parallelæ, quæ inter duas rectas parallelas continentur, ſunt inter ſe æquales.

23 Si nimirum rectæ AH, GK, quæ inter rectas parallelas AB, CD continentur, fuerint parallelæ, erunt etiam inter ſe æquales. Enimvero cum facta hac hypotheſi, quadrilaterum HKGA ſit parallelogrammum (a), oppoſita ipſius latera erunt æqualia (b). Igitur recta AH rectæ GK æqualis erit; adeoque &c.

Fig.11. Tab.II.

THEOREMA III.

Recta linea biſariam dividens oppoſita parallelogrammi latera; illius quoque diametrum dividit biſariam, & viciſſim biſariam a diametro dividitur.

24 Recta EG biſariam dividat oppoſita latera AB, DC parallelogrammi ABCD. Dico, biſariam quoque dividere ipſius parallelogrammi diagonalem AC, & viciſſim ab ipſa diagonali AC biſariam dividi.

Fig.12. Tab.II.

Demonſtratio.

Cum enim oppoſita latera AB, DC parallelogrammi ABCD ſint æqualia (c), eorum quoque dimidia erunt æqualia (d). Segmentum itaque GC æquale erit ſegmento AE. Quoniam vero latera AB, DC ſunt parallela, atque in ea incidit recta AC, anguli alterni BAC, ACD erunt æquales (e); ſicuti etiam eandem ob cauſam æquales erunt duo AEG, EGC, utpote ſimiliter alterni, producti a recta incidente EG. Itaque duo triangula AEF, GFC habent duos angulos FAE, AEF duobus angulis FCG, FGC æquales, alterum alteri. Habent autem etiam late-

(a) §.8. (b) §.20. (c) Ibid. (d) Lib.I. §.126. (e) Lib.IV. §.15.

latera AE, GC æqualia, quibus æquales anguli adjacent. Ergo reliqua ſimiliter latera unius æqualia erunt reliquis lateribus alterius, alterum alteri, quæ æqualibus *reſpective* angulis adverſantur, erit nempe latus AF æquale lateri FC, & latus EF lateri FG (a). Recta igitur EG biſariam dividit diagonalem AC, & viciſſim ab ipſa diagonali AC biſariam dividitur; ac proinde recta biſariam dividens oppoſita parallelogrammi latera &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Recta linea oblique incidens in plures rectas parallelas, quæ æqualia inter ſe mutuo intervalla habeant, in partes æquales ab ipſis rectis parallelis tota dividitur.

25 Ut ſi recta KL oblique inciderit in rectas parallelas AB, CD, EF, GH æqualia intervalla habentes, æquales erunt partes KS, ST, TL, in quas ab illis dividitur. Eductis namque ex punctis K, T rectis KN, TR, quæ ad perpendiculum inſiſtant rectæ AB, atque adeo etiam reliquis CD, EF (b), cum duo anguli KNT, RTN ſint recti (c), duæ KN, RT erunt parallelæ (d); ac proinde quadrilaterum KNTR erit parallelogrammum (e). Cumque perpendicula KM, MN, RQ, QT per hypotheſim ſint inter ſe æqualia, recta MQ biſariam dividet oppoſita latera KN, RT parallelogrammi KNTR, adeoque etiam rectam KT (f), quæ eſt diagonalis, ut patet, parallelogrammi KNTR. Partes igitur KS, ST rectæ oblique incidentis KL ſunt æquales. Eodem modo oſtendam, partes quoque ST, TL eſſe æquales. Æquales ergo erunt omnes partes KS, ST, TL rectæ oblique incidentis KL a rectis parallelis AB, CD, EF, GH æqualia intervalla habentibus determinatæ; adeoque &c. Fig. 13. Tab. II.

COROL-

(a) Lib.V.§.32.
(b) Lib.IV.§.16.
(c) Lib.III.§.23.
(d) Lib.IV.§.13.
(e) §.8.
(f) §.24.

COROLLARIUM II.

Recta parallelæ oblique incidentes in plures rectas parallelas æqualia intervalla habentes, in partes æquales dividuntur.

26 Ut ſi in rectas parallelas AB, CD, EF æqualia intervalla habentes oblique incidant rectæ parallelæ AL, GM,
Fig. 11. Tab. II. partes ipſarum HA, HL, GK, KM, in quas ab illis dividuntur, erunt inter ſe æquales. Quandoquidem pars AH æqualis eſt parti GK (a). Eſt autem GK æqualis parti KM (b). Ergo pars quoque AH partem KM æquabit (c). Cumque pars HL partem AH adæquet (d), partibus itidem GK, KM æqualis erit (e); eruntque propterea omnes AH, HL, GK, KM inter ſe æquales; ac proinde &c.

SCHOLION.

27 In utroque *corollario* poſitum eſt, lineas oblique in parallelas incidere. Quippe ſi incidentia fuerit ad perpendiculum, utrumque *corollarium* patet ex ſola *Definitione XI. hujus libri*. Etenim ſi ponatur recta RT incidere ad perpendi-
Fig. 11. Tab. II. culum in rectas AB, CD, EF, cum recta RT nequeat uni illarum ad perpendiculum incumbere, quin ceteris quoque perpendicularis exiſtat (f), ipſius partes RQ, QT erunt perpendicula, quibus ipſarum parallelarum intervalla determinantur. Quamobrem ex *Definit. laudata* ſegmenta RQ, QT erunt æqualia. Similiter ſi duæ parallelæ KN, RT ad perpendiculum incidant, ſegmenta perpendicularia KM, RQ erunt æqualia, ſicuti etiam ſegmenta MN, QT. Æqualia autem ſunt duo RQ, QT, ut modo vidimus. Ergo utrumque KM, MN utrique RQ, QT æquale erit, ſive quod perinde eſt, quatuor partes KM, MN, RQ, QT erunt inter ſe æquales.

THEO-

(a) §. 23. (b) §. 25. (c) Syn. Alg. §. 259. (d) §. 25. (e) Syn. Alg. §. 261. (f) Lib. IV. §. 16.

THEOREMA IV.

Omne quadrilaterum habens duo oppoſita latera æqualia; vel oppoſitos angulos inter ſe æquales, eſt parallelogrammum.

I.

28 Quadrilaterum ACDB habeat duo oppoſita latera AB, CD, ſicuti etiam duo AC, BD inter ſe æqualia. Dico, hujuſmodi quadrilaterum eſſe parallelogrammum. Fig. 1. Tab. II.

Demonſtratio.

Cum latus AB ſit ex hypotheſi æquale lateri CD, latus AD ſit commune utrique triangulo ADB, ADC, & baſis BD unius baſim AC alterius itidem ex hypotheſi adæquet, angulus BAD, angulo ADC æqualis erit (a). Sunt autem alterni producti a recta, ſive diagonali AD, incidente in rectas AB, CD, ut patet. Ergo duæ AB, CD erunt parallelæ (b). Sunt autem etiam æquales, junguntur que rectis AC, BD. Ergo etiam duæ AC, BD parallelæ erunt (c), adeoque &c.

II.

29 In quadrilatero ABCD ſint anguli ex adverſo æquales, angulus nimirum ABC angulum ADC, & angulus BAD angulum BCD adæquet. Dico, quadrilaterum ABCD eſſe parallelogrammum.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi angulus ABC æqualis eſt angulo ADC, & angulus BAD angulo BCD, erunt duo BAD, ADC æquales duobus ABC, BCD, & duo BAD, ABC duobus Fig. 10. Tab. II.

(a) Lib. V. §. 12. (b) Lib. IV. §. 12. (c) Lib. V. §. 18.

duobus BCD, CDA, ut patet. Sunt autem quatuor anguli ABC, ADC, BAD, BCD ſimul ſumti æquales quatuor rectis (a). Ergo tam duo BAD, ADC, quam duo BAD, ABC duobus rectis æquales erunt. Quamobrem cum tam illi, quam iſti ſint interni ad eaſdem partes, duæ rectæ AB, DC, quemadmodum etiam duæ rectæ AD, BC, erunt inter ſe parallelæ (b). Igitur omne quadrilaterum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Quadratum, altera parte longius, rhombus, & rhomboides ſunt parallelogramma.

30 Hujuſmodi namque figuræ quadrilateræ habent oppoſita latera æqualia, quemadmodum etiam angulos, qui ſunt ex adverſo, æquales, ut ex earum *definitionibus* conſtat (c). Ergo &c.

THEOREMA V.

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in iiſdem rectis parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia.

31 Super eadem baſi CD, & in iiſdem parallelis AF, CD conſtituta habeantur duo parallelogramma ACDB, ECDF. Dico, ea eſſe inter ſe æqualia.

Euclid. lib. 1. p. 35.

Demonſtratio.

Cum enim duo latera AB, CD parallelogrammi ACDB æqualia ſint inter ſe, quemadmodum etiam duo EF, CD parallelogrammi ECDF (d), æqualia erunt inter ſe duo AB, EF (e), utpote eidem CD æqualia. Quamobrem ſi utrique addatur ſegmentum BE, erit totum AE toti BF æquale (f). Eſt

Fig. 14. Tab. II.

(a) Lib. VI. §. 13.
(b) Lib. IV. § 9.
(c) §. 2. & ſeq.
(d) § 20.
(e) Syn. Alg. §. 259.
(f) Ibid. §. 265.

Eſt autem latus quoque AC lateri BD æquale (a), & angulus DBE angulo CAB (b); cum duo latera AC, BD ex hypotheſi ſint parallela. Igitur duo triangula AEC, BDF habent latera AE, BF, ſicuti etiam AC, BD, æqualia, nec non angulos EAC, FBD, qui æqualibus lateribus continentur, æquales. Ergo baſis quoque CE baſi DF æqualis erit, totumque triangulum AEC erit toti triangulo BDF æquale (c). Sublato propterea communi triangulo BGE, trapezium ACGB erit æquale trapezio EGDF (d). Quocirca, ſi utrique trapezio addatur triangulum CGD, parallelogrammum ACDB æquale erit parallelogrammo ECDF (e). Parallelogramma ergo ſuper eadem baſi &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Triangula ſuper eadem baſi, & in iiſdem rectis parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia.

32 Triangula nimirum AEC, AFC ſuper eadem baſi AC, & in iiſdem rectis parallelis AC, EF conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. Erectis namque ſuper baſi AC parallelogrammis AEBC, ADFC, hæc erunt *per hoc theorema* inter ſe æqualia. Eſt autem triangulum AEC medietas parallelogrammi AEBC, & triangulum AFC medietas parallelogrammi ADFC (f). Ergo duo ipſa triangula AEC, AFC ſunt inter ſe æqualia (g).

Euclid. lib. I. p. 37.

Fig. 15. Tab. II.

COROLLARIUM II.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerint baſim, & in iiſdem fuerint rectis parallelis conſtituta, erit parallelogrammum duplum trianguli.

33 Parallelogrammum ſcilicet AEBC duplum erit trianguli

Euclid. lib. I. p. 41.

K

(a) §. 20.
(b) Lib. IV. §. 14.
(c) Lib. V. §. 74.
(d) Syn. Alg. §. 266.
(e) Ibid. §. 265.
(f) §. 21.
(g) Lib. I. §. 126.

Digitized by Google

Fig. 15. Tab. II. guli AFC eandem habentis baſim AC; in iiſdemque rectis parallelis EF, AC conſtituti. Etenim ducta diagonali BC, duo triangula AEC, AFC erunt æqualia (a). Eſt autem parallelogrammum AEBC duplum trianguli AEC (b). Ergo duplum quoque erit trianguli AFC (c); adeoque &c.

THEOREMA VI.

Parallelogramma ſuper æquales baſes, & in iiſdem rectis parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia.

Euclid. lib. 1. p. 36. 34 Super æquales baſes BC, FG, & in iiſdem rectis parallelis AH, BG conſtituta habeantur duo parallelogramma ABCD, EFGH. Dico, ea eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.

Extrema rectarum BC, EH jungantur rectis EB, HC: Cum ergo recta EH æqualis ſit rectæ FG (d), ipſa EH rectæ quoque BC, quam recta FG ex hypotheſi adæquat, æ-
Fig. 16. Tab. II. qualis erit (e). Sunt autem duæ BC, EH parallelæ. Ergo parallelæ quoque erunt duæ BE, CH (f), eritque proinde quadrilaterum EBCH parallelogrammum (g). Eſt autem parallelogrammum ABCD, quemadmodum etiam parallelogrammum EFGH, æquale parallelogrammo EBCH (h): Ergo duo parallelogramma ABCD, EFGH erunt inter ſe æqualia (i). Itaque parallelogramma &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Triangula ſuper æquales baſes, & in iiſdem rectis parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia.

Euclid. lib. 1. p. 38. 35 Triangula nimirum BAC, FEG ſuper æquales baſes, BC,

(a) §. 32. (c) Lib. I. §. 112. (e) Syn. Alg. §. 262. (g) §. 8.
(b) §. 21. (d) §. 20. (f) Lib. V. §. 88. (h) §. 31. (i) Syn. Alg. §. 259.

BC, FG, & in iiſdem rectis parallelis AH, BG conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. Eſt enim triangulum BAC medietas parallelogrammi ABCD, & triangulum FEG medietas parallelogrammi EFGH (a). Quamobrem cum, ut modo oſtenſum eſt, hujuſmodi parallelogramma ſint inter ſe æqualia, ipſa quoque triangula BAC, FEG inter ſe æqualia erunt (b); adeoque &c. Fig.16. Tab.II.

COROLLARIUM II.

Si parallelogrammum, & triangulum æqualem habuerint baſim, & fuerint inter eaſdem rectas parallelas conſtituta, erit parallelogrammum duplum trianguli.

36 Parallelogrammum ſcilicet ABCD duplum erit trianguli FEG habentis baſim FG æqualem baſi BC, in iiſdemque rectis parallelis AH, BG conſtituti. Ducta namque diagonali AC in parallelogrammo ABCD, parallelogrammum ABCD duplum erit trianguli BAC (c). Eſt autem triangulum FEG æquale triangulo BAC (d). Ergo parallelogrammum ABCD duplum quoque erit trianguli FEG (e). Fig.16. Tab.II.

THEOREMA VII.

In omni triangulo rectangulo quadratum hypotenuſæ eſt æquale quadratis laterum ſimul ſumtis.

37 Eſto triangulum rectangulum BAC. Super ſingula autem ipſius latera AB, BC, CA conſtituta habeantur quadrata. Dico, quadratum BDEC hypotenuſæ BC æquale eſſe quadratis BFGA, ACKH laterum BA, AC ſimul ſumtis. Eucl. lib.1. p.47.

Demonſtratio.

Ab angulo recto BAC ipſius trianguli ducatur ad baſim DE quadrati BE recta AL, quæ ſit parallela lateribus BD, CE Fig.17. Tab.II.

K 2

(a) §.21. (b) Lib.I. §.126. (c) §.21. (d) §.35. (e) Lib.I. §.112.

CE ejuſdem quadrati, junganturque puncta F, C recta FC, & puncta A, D recta AD (a). Quoniam igitur quadrilatera GB, BE ſunt quadrata, latera FB, BA erunt æqualia, ſicuti etiam latera BC, BD (b); duoque proinde triangula FCB, ADB habebunt duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri. Habent autem & angulos FBC, ABD, qui æqualibus lateribus continentur, æquales. Cum enim duo anguli FBA, CBD ſint æquales, utpote recti (c), ſi utrique addatur angulus ABC, erit totus FBC toti ABD æqualis (d). Ergo triangulum FCB triangulo BAD æquale erit (e). Rurſus cum duo anguli GAB, BAC ſint recti, duæ rectæ lineæ GA, AC erunt in directum poſitæ (f); eritque propterea tota GC parallela rectæ FB; cum GA ſit ipſi FB parallela (g). Sunt igitur quadratum GB, & triangulum FCB ſuper eadem recta FB, & in iiſdem rectis parallelis GC, FB conſtituta. Quamobrem erit quadratum GB duplum trianguli FCB (h). Eandem ob cauſam parallelogrammum BOLD duplum erit trianguli BAD; cum eadem ſit utriuſque baſis BD, in iiſdemque rectis parallelis AL, BD ſint conſtituta, Ergo, ſicuti duo triangula FCB, BAD æqualia ſunt inter ſe, parallelogrammum quoque BOLD quadrato FGAB æquale erit (i). Eodem modo demonſtrabitur parallelogrammum OLEC æquale quadrato AHKC. Ergo totum quadratum BDEC æquale erit duobus quadratis FBAG, ACKH ſimul ſumtis. In omni ergo triangulo &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

38 Hujus theorematis eximius per univerſam Matheſim uſus eſt. Illius inventio Pythagoræ accepta refertur, qui, ut alibi etiam ex Laertio notavimus, Muſis victimas immolavit, quod in tam præclaro invento ab illis ſe adjutum putaret.

COROL-

(a) Lib III. §. 29. (b) §. 2. (c) §. 14. (d) Syn. Alg. §. 265. (e) Lib. V. §. 74. (f) Lib. III. §. 49. (g) §. 30. (h) §. 33. (i) Lib. I. §. 103.

COROLLARIUM.

Quadratum diagonalis cujuslibet quadrati eſt duplum quadrati ſingulorum laterum ejuſdem quadrati.

39 Ducta nimirum in quadrato ADCB diagonali AC, erectiſque ſuper eam, necnon ſuper latera AB, BC quadratis AE, AF, CG, quadratum AE diagonalis AC duplum erit tum quadrati AF lateris AB, tum quadrati CG lateris BC. Etenim cum angulus ABC ſit rectus (a), triangulum ABC erit rectangulum (b); ac proinde quadratum AE hypotenuſæ AC æquale erit quadratis AF, CG laterum AB, BC ſimul unitis (c). Duo autem quadrata AF, CG ſunt inter ſe æqualia (d). Ergo quadratum AE duplum erit tum quadrati AF, tum quadrati CG; adeoque &c. Fig. 18. Tab. II.

THEOREMA VIII.

Omnis figura plana rectilinea reſolvi poteſt in tot triangula plana rectilinea, quot habet latera.

40 Eſto hexagonum ACE. Dico, ipſum reſolvi poſſe in ſex triangula plana rectilinea, quemadmodum ſex ſunt ipſius latera.

Demonſtratio.

Sumto in illius area quovis puncto G, ducantur ex illo ad apices angulorum A, B, C, D, E, F, quos hexagonum ipſum continet, rectæ GA, GB, GC, GD, GE, GF. Perſpicuum eſt, tot hinc facta eſſe triangula, quot ſunt ipſius hexagoni latera. Horum autem triangulorum areæ ſimul ſumtæ aream dati hexagoni adæquant (e). Ergo diviſum erit Fig. 22. Tab. II

(a) §. 14.
(b) Lib. V. §. 29.
(c) §. 37.
(d) Lib. I. §. 187.
(e) Syn. Alg. §. 256.

erit in tot triangula, quot ſunt ipſius latera. Itaque omnis figura &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA IX.

Anguli interni cujusvis polygoni ſimul ſumti conficiunt ſummam tot rectorum, quot ſunt ipſius latera bis ſumta, demtis quatuor,

41 Eſto polygonum ſex laterum ABF. Dico, internos
Fig.22. ipſius angulos, ſi ſimul ſumantur, conficere ſummam octo
Tab.II. rectorum, tot nimirum, quot ſunt ipſius latera bis ſumta, demtis quatuor.

Demonſtratio.

Sumto in illius area puncto G, ductisque ad apices angulorum ipſius hexagoni rectis GA, GB, GC, GD, GE, GF, diviſum erit hexagonum in ſex triangula, quorum anguli ad baſim ſimul ſumti æquales erunt angulis ipſius hexagoni, ſi ipſi quoque ſimul ſumantur; ac proinde anguli ipſius hexagoni æquales erunt tot rectis, quot rectis æquales ſunt anguli, qui ad baſim illorum triangulorum reperiuntur (a). Hujuſmodi autem anguli ſimul ſumti ſummam conficiunt tot rectorum, quot ſunt hexagoni latera bis ſumta, demtis quatuor, videlicet octo rectorum. Quandoquidem cum tres anguli cujuslibet trianguli valeant duos rectos (b), omnes anguli omnium triangulorum, in quæ diviſum eſt hexagonum ACE ſimul ſumti, duodecim rectis æquales erunt. Quamobrem, cum, qui circa punctum G reperiuntur, anguli valeant quatuor rectos (c), anguli, qui ſunt ad baſes ipſorum triangulorum, ſive omnes anguli dati hexagoni ACE, octo rectis æquales erunt. Eodem modo ratiocinare de aliis quibuſcumque polygonis. Anguli ergo cujuslibet polygoni &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) Syn.Alg. §.262. (b) Lib.V. §.40. (c) Lib.III. §.44.

COROLLARIUM I.

Omnes anguli interni unius polygoni ſimul ſumti, æquales ſunt omnibus angulis internis ſimul itidem ſumtis alterius polygoni ejuſdem generis.

42 Anguli nimirum unius pentagoni ſimul ſumti æquales ſunt angulis alterius pentagoni ſimul itidem ſumtis. Utriuſque enim anguli valent tot rectos, quot ſunt ipſorum latera duplata, demtis quatuor.

COROLLARIUM II.

Si numerus angulorum rectorum, quos adæquant omnes anguli polygoni regularis ſimul ſumti, dividatur per numerum laterum ejuſdem, quotus erit valor cujuslibet anguli ipſius polygoni.

43 Ut ſi numerus rectorum angulorum, quibus æquales ſunt omnes anguli dati polygoni regularis, fuerit $= m$, & numerus laterum ponatur $= n$. Fuerit autem $\frac{m}{n} = p$, quotus p erit valor cujuslibet anguli ipſius polygoni. Cum enim ſumma omnium angulorum adæquet tot rectos, quot deſignat quantitas m, & omnes illi anguli ſint inter ſe æquales (a), totque ſint anguli in quolibet polygono, quot in eo ſunt latera, conſectarium eſt, ut quilibet illorum angulorum, ſit æqualis ſummæ m per numerum laterum diviſæ, ſcilicet quotienti p.

COROL-

(a) Lib.V. §.20.

COROLLARIUM III.

Ex omnibus figuris rectilineis ſola triangula æquilatera, quadrata, & hexagona regularia, ſi penes latera ſimul reſpective jungantur, replent ſpatium, quod eſt circa idem punctum in eodem plano.

44 Nimirum ſex triangula æquilatera, quatuor quadrata, & tria hexagona regularia, ſi jungantur penes latera, replere poſſunt ſpatium, quod eſt circa idem punctum in eodem plano, & præter hæc, nulla alia eſt figura, quæ aliquoties ſumta id præſtare queat. Primum patet; quia quilibet angulus trianguli regularis adæquat tertiam partem duorum rectorum (a), adeoque ſextam partem quatuor rectorum. Quilibet angulus quadrati eſt rectus (b); & quilibet angulus hexagoni regularis valet unum rectum, & unam inſuper tertiam partem unius recti (c). Alterum quoque manifeſtum fiet inductione. Conſtabit enim, ſi valor cujuslibet anguli ceterarum figurarum expendatur, earum angulos ſimul junctos vel ſummam excedere quatuor rectorum, vel ab illa deficere (d).

COROLLARIUM IV.

Omnes figuræ rectilineæ regulares ejuſdem generis ſunt inter ſe mutuo æquiangulæ.

45 Omnis enim angulus trianguli regularis valet tertiam partem duorum rectorum (e). Omnis angulus quadrati, quod ſolum inter quadrilatera eſt figura regularis, rectus eſt (f). Et omnis angulus polygoni regularis ejuſdem generis eſt æqualis numero rectorum, quos omnes illius anguli ſimul ſumpti adæquant, per numerum laterum diviſo (g).

THEO-

(a) Lib.V.§.43. (b) §.14. (c) §.43. (d) Videatur Pappus præf. in lib. 5. *Collect. Mathem.* & Proclus in Coroll. prop. 15. lib. 1. Euclidis. (e) Lib.V.§.43. (f) §.14. (g) §.43.

THEOREMA XI.

Anguli externi cujuslibet figuræ rectilineæ æquales ſunt quatuor rectis.

46 Latera hexagoni ACE directe ad eaſdem partes producantur, videlicet latus FA in *b*, latus AB in *c*, latus BC in *d*, latus CD in *e*, latus DE in *f*, & latus EF in *a*. Dico, angulos externos *b*AB, *c*BC, *d*CD, *e*DE, *f*EF, *a*FA ſimul ſumtos conficere ſummam quatuor angulorum rectorum. Fig. 12. Tab. II.

Demonſtratio.

Cum enim duo quilibet anguli, externus *b*AB, & internus deinceps poſitus FAB, valeant duos rectos (a), anguli interni, & externi hexagoni ACE ſimul ſumti erunt æquales duodecim rectis, nempe bis tot rectis, quot ſunt ipſius hexagoni latera. Conſtat autem, angulos internos, ſimul cum iis, qui fiunt circa punctum G, æquales itidem eſſe duodecim rectis (b). Ergo anguli interni ſimul cum externis æquales erunt angulis internis ſumtis cum iis, qui ſunt circa punctum G (c). Quamobrem ſublatis internis, erunt externi æquales iis, qui circa punctum G conſtitui poſſunt (d). Hi autem valent quatuor rectos (e). Ergo anguli quoque externi quatuor rectis æquales erunt (f). Itaque anguli externi &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Anguli externi unius figuræ rectilineæ ſimul ſumti, ſunt æquales angulis externis itidem ſimul ſumtis alterius cujuslibet figuræ rectilineæ.

47 Cum enim omnes ſint æquales quatuor rectis (g), omnes

(a) Lib. III. §. 40.
(b) §. 41.
(c) Syn. Alg. §. 259.
(d) Ibid. §. 266.
(e) Lib. III. §. 44.
(f) Syn. Alg. §. 262.
(g) §. 46.

omnes anguli externi unius figuræ planæ rectilineæ omnibus angulis externis alterius æquales erunt (a).

APPENDIX.

De lineis incommenſurabilibus.

DEFINITIO I.

48 *Magnitudines commenſurabiles dicuntur illæ, quibus datur communis menſura, ſeu quæ ſunt hujuſmodi, ut una eademque magnitudo eas exacte metiri poſſit.* Tales ſunt linea *bipalmaris*, & linea *tripalmaris*. Utramque enim *palmaris* linea adæquate metitur.

COROLLARIUM.

49 *Magnitudines commenſurabiles ſunt inter ſe, ut numerus vulgaris integer, vel fractus ad numerum vulgarem integrum, vel fractum.* Et viciſſim *magnitudines, quarum una eſt ad aliam, ut numerus vulgaris integer, vel fractus ad numerum vulgarem integrum, vel fractum, ſunt inter ſe commenſurabiles.* Numeri enim vulgares integri habent unitatem pro menſura communi, & numeri vulgares fracti eandem unitatis particulam, ſi ad idem nomen reducantur.

DEFINITIO II.

50 *Illæ vero magnitudines incommenſurabiles vocantur, quibus nulla eſt menſura communis, ſive pars, quæ eas omnes adæquate metiatur.*

COROLLARIUM.

51 *Illæ magnitudines ſunt inter ſe incommenſurabiles, quarum una*

(a) Syn. Alg. §.259.

una non eſt ad aliam, ut numerus vulgaris integer, vel fractus ad numerum vulgarem integrum, vel fractum. Hoc enim ipſo magnitudines illæ ſunt hujuſmodi, ut nulla pars aliquota illis communis inveniri queat.

LEMMA I.

Quadrata magnitudinum commenſurabilium ſunt inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

52 Sint duæ magnitudines commenſurabiles a, b. Dico, ipſarum quadrata aa, bb eſſe directe inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

Demonſtratio.

Cum enim magnitudines a, b ſint, ut numerus ad numerum (a), ponatur $a . b = 4. 3$. Igitur erit quoque $aa . bb = 16. 9$ (b); adeoque &c.

LEMMA II.

Illæ magnitudines, quarum quadrata ſunt inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum, ſunt inter ſe commenſurabiles.

53 Sint duæ magnitudines a, b, quarum quadrata aa, bb ſint directe inter ſe, ut numerus quadratus 16 ad numerum quadratum 9. Dico, magnitudines a, b eſſe *commenſurabiles.*

Demonſtratio.

Enimvero, cum per hypotheſim habeatur $aa : bb = 16.9$; horum quoque terminorum radices quadratæ a, b, 4, 3 erunt proportionales, erit nempe $a . b = 4. 3$ (c). Ergo

 duæ

(a) §.49. (b) Lib.I.§.188. (c) Ibid.

duæ magnitudines *a*, *b* erunt inter ſe *commenſurabiles* (a); adeoque &c.

LEMMA III.

Quadrata magnitudinum incommenſurabilium non ſunt inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

54 Sint duæ magnitudines *incommenſurabiles* *a*, *b*. Dico, earum quadrata *aa*, *bb* non eſſe inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

Demonſtratio.

Si enim quadratum *aa* eſſet ad quadratum *bb*, ut numerus quadratus ad numerum quadratum, radices *a*, *b* eſſent inter ſe *commenſurabiles* (b). Ergo &c.

LEMMA IV.

Illæ magnitudines ſunt incommenſurabiles, quarum quadrata non ſunt inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

55 Quadrata *aa*, *bb* magnitudinum *a*, *b* non ſint inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico, magnitudines *a*, *b* eſſe *incommenſurabiles*.

Demonſtratio.

Magnitudines namque *a*, *b* non poſſunt eſſe *commenſurabiles*, niſi earum quadrata *aa*, *bb* ſint inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum (c). Ergo &c.

LEM-

(a) §. 49. (b) §. 53. (c) §. 52.

LEMMA V.

Nullus numerus quadratus poteſt eſſe duplus alterius numeri quadrati.

56 Eſto numerus quadratus *a*. Dico, nullum inveniri poſſe numerum quadratum, cujus numerus ipſe *a* ſit duplus.

Demonſtratio.

Sumtis namque in ratione *dupla* quotcunque numeris ab unitate, videlicet 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. tertius dumtaxat ab unitate eſt quadratus, & ceteri omnes unum intermittentes (a). Ergo nullus numerus quadratus poteſt eſſe duplus alterius numeri quadrati.

THEOREMA UNICUM:

Diagonalis quadrati eſt incommenſurabilis lateribus ipſius quadrati.

57 Eſto quadratum ADCB, ejuſque diagonalis AC. Dico, rectam AC eſſe *incommenſurabilem* lateri AB ipſius quadrati.

Demonſtratio.

Quadratum AEC diagonalis AC eſt duplum quadrati AFB lateris AB ipſius quadrati (b). Nullus autem numerus quadratus poteſt eſſe duplus alterius numeri quadrati (c). Ergo quadratum AEC diagonalis AC non eſt ad quadratum AFB lateris AB, ut numerus quadratus ad numerum quadratum. Fig. 12. Tab. II. Illæ autem magnitudines ſunt inter ſe *incommenſurabiles*, quarum quadrata non ſunt, ut numerus quadratus ad numerum quadratum (d). Ergo diagonalis AC eſt *incommenſurabilis* lateri AB, eademque ratione reliquis lateribus quadrati ADCB. Itaque diagonalis &c. quod erat oſtendendum.

SCHO-

(a) Lib. II. § 29. (b) § 39. (c) § 56. (d) § 55.

SCHOLION.

58 Verum ut id evidentius fiat, ponamus, diagonalem
Fig.19. dati quadrati eſſe rectam GH, ejuſdem vero latus rectam
Fig.20. Tab.II. CD. Si ergo hujuſmodi rectæ ſunt inter ſe *commenſurabiles*, communis earum menſura ſit pars GO, ſintque propterea in diagonali GH *ſex* partes ipſi GO æquales; *quinque* vero in latere CD. Igitur quadratum EGHF diagonalis GH continebit 36. parva quadrata æqualia quadrato GP communis menſuræ GO. At quadratum ACDB lateris CD nonniſi 25. ex hiſce parvis quadratis, ut patet, comprehendet. Quadratum ergo EGHF non erit duplum quadrati ACDB. Quamobrem, ut ſit duplum, non poteſt latus CD *quinque* ex illis partibus comprehendere, ex quibus *ſex* in diagona-
Fig.21. li GH continentur. Ponamus idcirco, *quatuor* dumtaxat ex
Tab.II. illis partibus in recta, ſive latere MN dati quadrati reperiri. Igitur quadratum KMNL 16 quadrata dumtaxat, quorum ſingula quadrato GP æqualia ſint, complectetur; ac proinde quadratum EGHF diagonalis GH, neque in hoc caſu duplum erit quadrati KMNL lateris MN. Ut igitur quadratum diagonalis GH ſit duplum quadrati lateris dati quadrati, debet latus ipſum continere minus quam *quinque* ex illis partibus, ex quibus *ſex* habentur in ipſa diagonali GH, plus vero quam *quatuor*. Verum cum demonſtratio robur habeat, quicumque ſit numerus partium aliquotarum, in quas diviſa ponatur diagonalis GH, perſpicuum remanet, diagonalem, atque latus quadrati eſſe lineas illius indolis, ut nulla aſſignari queat pars, quæ eas omnes adæquate metiatur.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER VII.

De circulo.

C*Irculus* figuris omnibus planis nobilior eſt, tantæque præſtantiæ, ut Ariſtoteles *admirandorum omnium*, quæ in natura fiunt, *principium*, *&* *cauſam* illum dixerit. Eximias itaque *circuli* affectiones hoc libro complectemur, & demonſtrabimus.

DEFINITIO I.

1 C*Irculus eſt figura plana ſub una tantum curva linea comprehenſa, in cujus area punctum eſt, a quo omnes rectæ ductæ in illam curvam lineam, ſunt inter ſe æquales.* Hujuſmodi eſt figura ABCD curva linea ABCD undique terminata. Fig.21. Æquales namque ſunt omnes rectæ EA, EB, EC, ED, ceteræque omnes, quæ a puncto E in illam curvam ABCD cadere poſſunt. Tab.II.

DEFINITIO II.

2 *Circumferentia circuli*, quæ illius etiam *peripheria* dici ſolet, *eſt illa curva linea, qua circulus undique clauditur*. Sic linea curva ABCD eſt *circumferentia*, & *peripheria* circuli ABCD. Fig.21. Tab.II.

DEFINITIO III.

3 *Centrum circuli eſt punctum in illius area ſumtum, a quo omnes rectæ lineæ, quæ in illius peripheriam cadunt, ſunt inter ſe æquales.*

Fig.23. Tab.II. *les*. Tale eſt punctum E in circulo ABCD; cum æquales ſint rectæ EA, EB, EC, ED, quæ ab eo ductæ ſunt in peripheriam ABCD.

COROLLARIUM I.

4 *Singula puncta peripheriæ circuli æqualiter diſtant ab illius centro*. Æquales enim ſunt rectæ, quæ illorum omnium diſtantiam metiuntur.

COROLLARIUM II.

5 *Centrum circuli in illius medio poſitum eſt*. Definiri propterea etiam ſolet: *punctum in medio circuli conſtitutum*.

COROLLARIUM III.

6 *Æquales ejuſdem circuli arcus ſibi mutuo congruunt*. Quippe, ſi ſecus, non omnia ipſorum puncta æque diſtarent a centro, ſed magis illa, quæ extra alterum ipſorum arcuum caderent.

DEFINITIO IV.

7 *Diameter circuli eſt recta quæcumque linea ducta per centrum ipſius circuli, & utrinque ad illius peripheriam terminata*. Hujuſmodi ſunt in circulo ABCD duæ rectæ BD, AC. Tranſ- Fig.23. Tab.II. eunt enim per illius centrum E, & in illius peripheriam deſinunt.

COROLLARIUM.

8 *Omnis diameter circuli totum ipſum circulum, ejuſque peripheriam bifariam dividit*. Tranſit enim per punctum, quod in illius medio poſitum eſt (a), quodque a ſingulis punctis peripheriæ ipſius circuli æqualiter diſtat (b).

DEFI-

(a) §.5. (b) §.4.

DEFINITIO V.

9 *Radius circuli eſt recta quæcumque linea ducta a centro circuli in illius peripheriam*. Hic *ſemidiameter* etiam dicitur, quod ſit medietas *diametri*. Tales igitur in circulo ABCD ſunt rectæ EA, EB, EC, ED; cum earum quælibet cadat a centro E ipſius circuli in illius peripheriam ABCD. Fig.23. Tab.II.

COROLLARIUM I.

10 *Omnes ejuſdem circuli radii ſunt inter ſe æquales*: Omnes namque illæ rectæ lineæ æquales ſunt inter ſe, quæ a centro circuli in illius peripheriam cadunt (a).

COROLLARIUM II.

11 *Omnes quoque ejuſdem circuli diametri ſunt inter ſe æquales*: Cum enim quælibet diameter ſit dupla radii, ſicuti omnes radii, ita diametri omnes ejuſdem circuli erunt inter ſe æquales (b).

COROLLARIUM III.

12 *Anguli, quos efficit radius quilibet circuli cum ejuſdem peripheria, ſunt æquales*. Angulus nimirum EDA æqualis eſt angulo EDC, quos efficit radius ED circuli ABCD cum ejuſdem peripheria ABCD. Etenim ſi ſumantur hinc inde æquales arcus DA, DC, eorumque alter revolvatur, immoto exiſtente radio ED, illi ſibi mutuo congruent (c). Congruunt ergo anguli EDA, EDC. Igitur ſunt inter ſe æquales (d). Fig.21. Tab.III.

DEFINITIO VI.

13 *Chorda circuli eſt quælibet recta linea intra circulum ducta*; M *& utrin-*

(a) §.3. (b) Lib.I.§.103. (c) §.6. (d) Lib.V.§.14.

& utrinque ad illius peripheriam terminata. Hujuſmodi in circulo ABCD eſt tum recta AC, tum recta DC. Harum porro rectarum altera AC dicitur chorda arcus ABC, altera DC chorda arcus DGC, quibus ſubtenduntur, nuncupatur.

Fig. 24. Tab. II.

COROLLARIUM.

14 *Omnis circuli diameter eſt illius chorda. At non viciſſim*. Non enim chorda, quemadmodum diameter, id neceſſario requirit, ut per circuli centrum tranſeat.

DEFINITIO VII.

15 *Semicirculus eſt figura ſub circuli diametro, ejuſque ſemiperipheria comprehenſa*, ut BDAB, BCDB. Diximus enim, omnem circuli diametrum bifariam circulum ipſum dividere (a).

Fig. 23. Tab. II.

DEFINITIO VIII.

16 *Quadrans circuli eſt quarta pars ipſius circuli, nimirum figura contenta ſub quarta parte peripheriæ, & duobus radiis angulum rectum in centro circuli conſtituentibus*. Talis eſt figura DEC. Continetur enim ſub arcu DC, qui eſt quarta pars peripheriæ ABCD totius circuli ABCD, & ſub duobus radiis ED, EC, qui angulum rectum in centro E ipſius circuli conſtituunt.

Fig. 23. Tab. II.

COROLLARIUM.

17 *Arcus quadrantis* 90. gradus *continet*. Tota enim peripheria circuli in 360. *gradus* dividitur (b).

DEFINITIO IX.

18 *Segmentum circuli eſt portio ipſius circuli contenta ſub parte peri-*

(a) §. 8. (b) Lib III. §. 47.

peripheria, *& chorda illi ſubtenſa*. Sic portio DGC circuli DAC arcu DGC, ejuſque chorda DC comprehenſa, ipſius Fig.24. Tab.II.
circuli ſegmentum nuncupatur.

COROLLARIUM.

19 Cum circuli diameter bifariam circulum ipſum dividat, *illud circuli ſegmentum erit majus, quod illius centrum continet; illud vero minus, quod circuli centrum minime comprehendit*. Segmentum ſcilicet DAC circuli DAC majus erit ſegmento DCG ejuſdem; cum circuli centrum in ſegmento DCA reperiatur. Fig.24. Tab.II.

DEFINITIO X.

20 *Sector circuli eſt illius portio ſub duobus radiis, & arcu, quem illi intercipiunt, comprehenſa*. Hujuſmodi eſt pars HEC circuli ABCD; continetur enim ſub duobus radiis EH, EC, & arcu HC. Fig.23. Tab.II.

DEFINITIO XI.

21 *Recta linea circulum tangere dicitur, quæ habet commune punctum in peripheria, & ſi in directum producatur, tota extra ipſum circulum cadit*. Contra vero *illa dicitur ſecare circulum, quæ producta illius peripheriam dirimit*. Sic recta GF tangit circulum ABF; cum directe producta in H, tota extra ipſum circulum conſiſtat. At vero e contrario recta KF ſecat circulum CFD; cum ſi directe producatur in L, illius aream ſubeat. Fig.25. Tab.II.

DEFINITIO XII.

22 *Duo circuli ſeſe mutuo tangere dicuntur, cum eorum peripheriæ habent commune punctum, quin earum una alteram dirimat*. Verum dupliciter duo circuli poſſunt ſeſe mutuo tangere, *intus*, & *extra*. Se tangunt *extra*, cum ita ſeſe tangunt,

Fig.25. gunt, ut tamen eorum unus totus *extra* alterum reperiatur;
Fig.26. Tab.II. ſicuti patet de duobus circulis ABF, FDC ſeſe mutuo tangentibus in F. Contra vero ſeſe mutuo tangent *intus*, cum eorum unus totus intra alterum conſiſtit: qua ratione ſeſe tangunt duo circuli ABC, CDE. Eſt enim punctum C commune peripheriis utriuſque circulis, ſimulque circulus ABC circulum CDE totaliter continet.

DEFINITIO XIII.

23 *Duæ rectæ lineæ dicuntur æqualiter hinc inde diſtare a centro circuli, in quo utraque reperitur, cum rectæ a centro ipſius circuli in illas ad perpendiculum ductæ, inter ſe ſunt æquales.* Contra vero *illa magis, quam alia, a circuli centro diſtat, in quam ab ipſo centro major perpendicularis cadit*. Duæ nimirum
Fig.27. Tab.II. rectæ AB, CD æqualiter hinc inde diſtant a centro E circuli ACDB; quia rectæ EF, EG ductæ in illas a centro E, ipſiſque ad perpendiculum inſiſtentes, ſunt inter ſe æquales. Si autem perpendicularis EF major eſſet recta perpendiculari EG, recta AB magis, quam recta CD, ab ipſo centro E diſtare diceretur.

DEFINITIO XIV.

24 *Angulus ad centrum, ſive in centro circuli poſitus, vocatur ille, qui a duobus ipſius circuli radiis in ipſo centro efficitur.*
Fig.28. Tab.II. Sic angulus HEC productus in centro E circuli ABCD a duobus radiis EH, EC dicitur angulus ad centrum, ſive in centro ipſius circuli ABCD.

COROLLARIUM I.

25 *Menſura anguli ad centrum circuli eſt arcus ipſius circuli, quem illius crura comprehendunt*. Menſura nimirum anguli
Fig.28. Tab.II. HEC poſiti in centro E circuli ABCD, eſt arcus HC peripheriæ ipſius circuli intra illius crura EH, EC comprehenſus; Arcus namque HC deſcriptus habetur ex ipſius anguli api-

li apice E; prout requiritur, ut illius menſura dici poſſit (a).

COROLLARIUM II.

26 *Tot ergo* graduum, *&* minutorum *erit angulus ad circuli centrum poſitus, quot* gradus, *&* minuta *ille numerat arcus, quem ipſius anguli crura intercipiunt*. Videlicet angulus HEC ad centrum E circuli ABCD dicetur tot *graduum*, & *minutorum*, quot erunt *gradus*, & *minuta* in arcu HC. Fig.23. Tab.II.

COROLLARIUM III.

27 *Anguli poſiti in centro circuli ſunt directe inter ſe, ut arcus ipſius circuli, quos eorum crura comprehendunt*. Et viciſſim *arcus hujuſmodi eam habent rationem inter ſe, quam habent anguli ad centrum circuli conſiſtentes, quibus ipſi arcus ſubtenduntur*. Tab.II. Ut ſi ad centrum E circuli ABCD duo fuerint anguli BEH, Fig.23. HEC, erit angulus BEH ad angulum HEC, ut eſt arcus BH ad arcum HC. Et viciſſim arcus BH erit ad arcum HC, ut Euclid. eſt angulus BEH ad angulum HEC. Id enim ex eo neceſ- lib. 6. ſario ſequitur, quod arcus BH, HC quantitatem angulo- p. 33. rum BEH, HEC definiant.

COROLLARIUM IV.

28 *Ut angulus in centro circuli ad quatuor rectos, ita arcus illi ſubtenſus ad totam peripheriam*. Et viciſſim, *ut arcus circuli ad totam peripheriam, ita angulus in centro ipſius circuli illi arcui inſiſtens ad quatuor rectos*. Nimirum ſi in centro E circuli ABCD Fig.23. fiant quatuor anguli recti AED, DEC, CEB, BEA, angu- Tab.II. lusque ſpectetur HEC ad ipſum itidem centrum poſitus, arcus HC illi ſubtenſus eam habebit rationem ad totam peripheriam ABCD, quam habet angulus HEC ad quatuor rectos AED, DEC, CEB, BEA. Et viciſſim angulus HEC erit ad quatuor rectos AED, DEC, CEB, BEA, ut eſt arcus

(a) Lib.III. §.13.

cus HC ad totam peripheriam ABCD. Enimvero ſicuti arcus HC metitur angulum HEC, ita quatuor quadrantes AB, BC, CD, DA, ſive tota peripheria ABCD metitur quatuor rectos angulos AEB, BEC, CED, DEA (a). Ergo quam proportionem habet angulus HEC ad quatuor rectos AEB, BEC, CED, DEA, eandem habebit arcus HC ad totam peripheriam ABCD; & viciſſim quam habet rationem arcus HC ad totam peripheriam ABCD, eandem quoque habebit angulus HEC ad quatuor rectos AEB, BEC, CED, DEA.

SCHOLION.

29 Ceterum ex eo, quod circa centrum circuli nonniſi quatuor anguli recti conſtitui poſſint (b), anguliqne ad centrum poſiti menſura ſit arcus ipſius circuli illi ſubtenſus, ad evidentiam deducitur, omnes angulos rectos eſſe inter ſe æquales, quæcumque ſit longitudo linearum, quæ angulum ipſum conſtituunt. Enimvero, cum angulus AED
Fig.23. Tab.II. conſiſtens in centro E circuli ABCD ſit rectus, alter AEB deinceps poſitus erit illi æqualis (c); cumque angulorum AED, AEB menſura ſit ſemiperipheria BAD, quam determinat diameter BD (d), ſtante æqualitate angulorum BEA, AED, arcus AD, AB erunt æquales; ac proinde menſura anguli recti AED erit medietas ſemiperipheriæ BAD, ſive quadrans totius peripheriæ, arcus nimirum AD. Omnes autem anguli recti ſunt hujuſmodi, ut, ſi alterum ipſorum crus directe producatur, efficiant angulum ſibi æqualem; atque adeo ſi eodem intervallo ex ſingulorum apice circulus deſcribatur, arcum ſubtendant a quadrante ipſius circuli haudquaquam diverſum. Ergo menſura omnium angulorum rectorum eſt quarta pars peripheriæ ejuſdem circuli. Omnes autem illi anguli æquales ſunt inter ſe, quos idem arcus circuli ex eorum apice deſcriptus metitur (e). Igitur omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

DEFI-

(a) Lib.III. §.45. (b) Ibid. (c) Ibid. §.18. (d) §.8. (e) §.27.

DEFINITIO XV.

30 *Angulus ad peripheriam circuli vocatur ille, cujus apex
in peripheria conſiſtit, crura vero in eandem deſinunt, ejuſque
arcum continent.* Hujuſmodi eſt angulus ADC. Illius quip- Fig.24.
pe apex D in peripheria circuli ADC reperitur; crura ve- Tab.II.
ro DA, DC ad eandem terminantur.

DEFINITIO XVI.

31 *Anguli tam ad circuli centrum, quam ad illius periphe-
riam poſiti, dicuntur illi arcui inſiſtere, quem illorum cru-
ra intercipiunt.* Sic angulus ad centrum HEC inſiſtere Fig.23.
dicitur arcui HC, & angulus ad peripheriam ADC ar- Fig.24. Tab.II.
cui ABC.

DEFINITIO XVII.

32 *Angulus in portione circuli conſiſtens vocatur ille; qui
efficitur a duabus rectis lineis ductis a puncto ipſius arcus ad
puncta ejuſdem extrema.* Sic angulus ADC conſiſtere dici- Fig.24.
tur in portione, ſive ſegmento ACD circuli ADC, quem- Tab.II.
admodum etiam angulus ABC in portione ACB ejuſdem
circuli.

DEFINITIO XVIII.

33 *Angulus ſegmenti eſt ille, qui a recta circulum tangen-
te, & chorda per punctum contactus ducta efficitur.* Talis eſt
angulus DCE productus in puncto contactus C a recta FE
circulum DAC tangente, & a chorda DC, ſicuti etiam Fig.24. Tab.II.
angulus DCF productus in eodem puncto ab iiſdem re-
ctis, nimirum a tangente EF, & a chorda DC. Angu-
lus enim DCE dicitur angulus ſegmenti minoris DCG,
& angulus DCF ſegmenti majoris DAC: ubi notandum
eſt, ſegmentum DCG dici alternum, ſi ad angulum DCF,
& ſeg-

& ſegmentum DAC itidem alternum vocari, ſi ad angulum DCE referatur.

SCHOLION.

34 Angulum ſegmenti aliter nonnulli definiunt: Dicunt enim, *angulum ſegmenti eſſe illum, qui circuli arcu, ejuſque chorda comprehenditur*, cujuſmodi eſt angulus GDC.

DEFINITIO XIX.

35 *Angulus contactus vocatur ille, qui a recta tangente, & arcu in puncto contactus efficitur*. Hujuſmodi eſt angu-
Fig.22. Tab.II. lus FAB, qui fit in puncto contactus A a recta tangente FA, & ab arcu BA.

THEOREMA I.

Unius circuli unicum eſt centrum.

36 Eſto circulus ABCD, cujus centrum ſit punctum E. Dico, in illius area nullum aliud aſſignari poſſe punctum, quod pro illius centro haberi queat.

Demonſtratio.

Si namque fieri poteſt, circuli ABCD duo ſint centra E, H. Igitur ducta per utrumque recta AC, eaque ad
Fig.23. Tab.II. peripheriam uſque perducta, erit recta EC rectæ EA æqualis (a); ac proinde recta HC major recta HA (b). Ergo punctum H non eſt centrum circuli ABCD, eandemque ob cauſam nullum aliud diverſum a puncto E. Unius itaque circuli &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) §.20. (b) Syn.Alg.§.257.

THEOREMA II.

In eodem; vel æqualibus circulis æquales arcus æquales rectas capiunt, & viciſſim arcus, qui æquales rectas capiunt, ſunt æquales.

I.

37 In circulo ABC ſumantur æquales arcus BO, OC. Dico, illorum chordas BO, OC eſſe inter ſe æquales. Euclid. lib. 3. p. 29.

Demonſtratio.

Cum enim arcus BO, OC ſint æquales; ductis radiis DB, DO, DC, anguli BDO, ODC erunt æquales (a). Æqualia ſunt autem etiam latera DB, DO, DC triangulorum BOD, DOC (b). Ergo baſes quoque BO, OC erunt æquales (c). Fig. 28. Tab. II.

II.

38 Viciſſim vero æquales ſint chordæ BO; OC: Dico, æquales quoque eſſe arcus BO, OC. Euclid. lib. 3. p. 28.

Demonſtratio.

Etenim iiſdem poſitis, anguli BDO, ODC erunt æquales (d), ob æqualitatem ſcilicet laterum BD, DO, DC, necnon baſium BO, OC. Ergo æquales itidem erunt arcus BO, OC, quibus anguli ipſi inſiſtunt (e). In eodem igitur, vel æqualibus circulis &c. quod erat oſtendendum.

(a) §.27.
(b) §.10.
(c) Lib.V.§.71.
(d) Ibid.§.82.
(e) §.27.

THEOREMA III.

Si radius circuli ad angulos rectos, ſive ad perpendiculum chordam ſecuerit, biſariam ipſam, ejusque arcum ſecabit. Et viciſſim radius circuli biſariam chordam ſecans, eſt ipſi chordæ perpendicularis.

I.

Euclid. lib. 3. p. 3. 39 In circulo ABC radius DO ad angulos rectos dividat chordam BC. Dico, ipſam chordam BC a radio DO biſariam dividi.

Demonſtratio.

Ad extremachordæ BC ducantur radii DB, DC. Cum igitur rectæ DB, DC ſint æquales (a), triangulum BDC

Fig. 28. Tab. II. erit iſoſceles (b). Eſt autem per hypotheſim recta DE baſi BC ipſius trianguli perpendicularis. Ergo recta DE biſariam baſim ipſam BC ſecabit (c); adeoque &c.

II.

40 Dico, radium DO biſariam quoque dividere arcum BOC chordæ BC.

Demonſtratio.

Cum enim radius DO, ut modo oſtenſum eſt, biſariam dividat baſim BC trianguli iſoſcelis BDC, illius quoque angulum verticalem BDC biſariam ſecabit (d). Anguli ergo BDO, ODC ſunt æquales. Ergo æquales quoque ſunt arcus BO, OC, quibus anguli ipſi inſiſtunt (e); ac proinde &c.

III.

(a) §.10.
(b) Lib.V. §.25.
(c) Lib.V. §.78.
(d) Ibid. §.86.
(e) §.27.

III.

41 Viciſſim vero radius DO bifariam dividat chordam BC in puncto E. Dico, ſectionem hujuſmodi eſſe ad angulos rectos, atque ideo radium DO chordæ BC ad perpendiculum inſiſtere.

Demonſtratio.

Quia iiſdem poſitis, triangulum BDC eſt iſoſceles, & recta DE ducta eſt ab angulo ipſius verticali BDC ad baſim BC. Ergo ſi recta DE bifariam baſim ipſam dividit, erit ipſi baſi perpendicularis (a). Itaque ſi radius circuli &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA IV.

Si in circulo recta quadam linea aliam rectam bifariam, & ad angulos rectos ſecuerit, erit in recta ſecante centrum circuli.

42 In circulo ABCD recta AC bifariam, atque ad angulos rectos dividat rectam BD. Dico, centrum circuli ABCD in ipſa ſecante AC reperiri. Euclid. lib. 3. Corol. prop. 1.

Demonſtratio.

Si namque ſtante hypotheſi, centrum circuli ABCD in recta ſecante AC non exiſtit, hujuſmodi centrum ſit extra illam, videlicet punctum F. Ducatur ergo a centro F in rectam BD recta FE. Igitur cum recta BD dividatur in puncto E bifariam a recta AC, ipſa quoque BD bifariam ſecabitur a recta FE. Cumque recta FE ex centro F ipſius circuli in rectam cadat BD, erit recta FE rectæ BD perpendicularis (b). Poſita eſt autem etiam recta AE perpendicularis rectæ ei- Fig. 1. Tab. III.

 dem

(a) Lib. V. §. 29. (b) §. 41.

dem BD, & quidem ad idem punctum E. Ergo duæ rectæ EA, EF excitari poſſunt ad eaſdem partes ex eodem puncto E eidem rectæ BD ad perpendiculum incumbentes. Hoc autem omnino repugnat (a). Ergo punctum F non eſt centrum circuli ABCD. Eodem modo demonſtrabitur, nullum punctum extra rectam ſecantem AC eſſe centrum circuli ABCD. Igitur hujuſmodi centrum eſt in ſecante AC; adeoque ſi in circulo &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA V.

Recta linea ducta ad angulos rectos per extremum diametri extra peripheriam ipſius circuli totaliter cadit. Ex illo autem puncto nequit duci alia recta, quæ locum habeat inter arcum circuli integrum, & rectam ipſam tangentem, ſed alia quæcumque hujuſmodi linea ipſius circuli peripheriam ſecabit.

I.

Euclid. lib. 3. p. 16. 43 Per extremum punctum C diametri AC ducatur ad angulos rectos recta KL. Dico, totam KL extra peripheriam cadere ipſius circuli ABCD.

Demonſtratio.

Cum enim ex hypotheſi radius OC ad perpendiculum rectæ KL inſiſtat, minima erit omnium rectarum OG, OK, quæ a centro O ipſius circuli ABCD in rectam KL cadere poſſunt (b). Ergo alia quæcumque recta linea ducta a centro O in rectam KL ſecundum aliquam ſui partem extra peripheriam cadet ABCD. Omnes enim radii ſunt inter ſe æquales (c). Quamobrem ſingula puncta rectæ KL cadent extra peripheriam ABCD præter punctum C, quod eſt ipſi peripheriæ, rectæque KL commune; adeoque &c.

Fig. 2. Tab. III.

II.

(a) Lib. III. §. 50. (b) Lib. V. §. 57. (c) §. 10.

II.

44 Rurſus dico, ex puncto C excitari non poſſe rectam, quæ locum habeat inter arcum CD, & rectam CL, quin ſecundum aliquam ſui partem intra circulum ABCD cadat.

Demonſtratio.

Si namque fieri poteſt, hujuſmodi linea ſit recta CM. Igitur cum angulus OCL ex hypotheſi ſit rectus, angulus OCM erit minor recto, ac proinde radius OC non erit ad perpendiculum rectæ CM. Ducatur itaque a centro O in ipſam CM recta perpendicularis OH. Hæc propterea minor erit aliis omnibus, quæ a centro O in ipſam CM cadere poſſunt, adeoque etiam recta OC (a). Recta autem OH ſimul excedit rectam OC; cum ex hypotheſi recta OH ſecundum aliquam ſui partem extra peripheriam circuli ABCD cadat. Ergo recta OH erit ſimul major, & minor radio OC, quo certe nihil abſurdius. Nequit igitur recta CM locum habere inter arcum CD, & rectam CL; adeoque recta linea &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Angulus contingentiæ nulla recta linea dividi poteſt.

45 Neque enim poteſt recta linea dividere angulum contingentiæ DCL, niſi educta ex puncto C locum habeat inter arcum CD, & rectam CL, ut patet.

COROL-

(a) Lib. V. §. 57.

COROLLARIUM II.

Si centris in eadem recta linea in infinitum producta acceptis, deſcribantur per ejuſdem rectæ extremum infiniti circuli, recta per idem extremum ad angulos rectos traducta, extra omnium peripheriam tota verſabitur.

46 Recta nimirum HK ducta ad angulos rectos per extremum punctum B rectæ BA, tota verſabitur extra peripheriam circulorum AEB, CB, DFB, & aliorum quotcumque in infinitum, centrum habentium in eadem recta BA directe ad partem A in infinitum producta. Quod enim de uno AEB oſtenſum eſt, de ceteris omnibus eodem modo demonſtrabitur.

Fig. 3. Tab.III.

COROLLARIUM III.

Peripheriæ circulorum, centrum in eadem recta habentium, tranſeuntes per extremum punctum illius rectæ lineæ, quo majores ſunt, magis quidem accedunt ad rectam per illud punctum traductam, at nunquam illi rectæ congruere poſſunt.

47 Sic peripheria circuli DFB proximior eſt rectæ BK, quam peripheria circuli CB. At fieri nequit, ut peripheria unius ex illis circulis, quamvis extenſionis infinitæ, congruat rectæ BK in altero puncto præter punctum B. Id enim ſi contingere poſſet, recta BK extra illius peripheriam tota non caderet.

Fig. 3. Tab.III.

COROLLARIUM IV.

Angulus contingentiæ curva linea dividi, & in infinitum minui poteſt.

48 Quandoquidem evidens eſt, angulum contingentiæ EBK in plures dividi ope arcuum BC, BF. Cumque infinitæ circulorum peripheriæ per punctum B tranſire queant, manifeſte conſtat, angulum ipſum EBK in infinitum minui poſſe. Fig. 3. Tab.III.

SCHOLION.

49 Quamquam *angulus contingentiæ* ope rectæ lineæ dividi nequeat, non propterea *abſolute* indiviſibilis cenſendus eſt, cum, ut modo vidimus, circuli arcus ipſum perfecte dividat. Perperam quoque hinc infertur, *angulum contingentiæ* minorem eſſe quocumque rectilineo acuto quantumvis exiguo. Quandoquidem cum *angulus contingentiæ* ſit angulus mixtus, utpote qui a recta curvaque linea efficitur, diverſi omnino generis eſt a rectilineo; adeoque illegitima eſt quæcumque inter illos inſtituta comparatio. Debent enim magnitudines eſſe ejuſdem generis, ut una ad alteram referri poſſit (a).

THEOREMA VI.

Si recta linea circulum tangat, a centro autem ipſius circuli ad punctum contactus recta ducatur, erit tangenti perpendicularis.

50 Circulum ABCD tangat recta quædam KL in puncto C. Ducatur autem a centro O ipſius circuli ad punctum contactus C recta OC. Dico, rectam, ſive radium OC rectæ tangenti KL ad perpendiculum incumbere. Euclid. lib. 3. p.18.

Demon-

(a) Lib.I.§.3.

Demonſtratio.

Etenim ſi radius OC ad perpendiculum non incumbit rectæ KL, ſit recta OG ipſi KL perpendicularis. Hæc ergo erit minor recta OC (a), quæ perpendicularis non eſt. Eſt
Fig. 2. Tab.III. autem ſegmentum OP ipſius OG æquale rectæ OC (b), ac proinde tota OG major eſt ipſa OC. Ergo recta OG ſimul major, & minor erit recta OC, quo nihil abſurdius. Recta igitur OG rectæ tangenti KL ad perpendiculum non incumbit, eandemque ob cauſam nulla alia præter rectam OC. Itaque ſi recta linea &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Circulum rectam tangens, in uno tantum puncto ipſam tangit.

51. Si namque in pluribus ſimul punctis rectam tangeret, plures ſimul rectæ ex eodem puncto, ſcilicet centro tangentis circuli, in ipſam rectam cadere poſſent, eidem ad perpendiculum inſiſtentes, ut *ex hoc theoremate* liquido conſtat. Id autem aperte falſum eſt (c). Ergo circulus rectam tangens, in uno tantum puncto ipſam tangit.

COROLLARIUM II.

Circulus circulum exterius tangens, in uno tantum puncto ipſum tangit.

Euclid. lib. 3. p. 13. 52 Etenim ſi circulus AB exterius tangens circulum CD, in pluribus punctis ipſum tangeret, uterque in pluribus ſimul punctis tangeret rectam GH per punctum contactus F
Fig. 25. Tab.II. traductam. Ergo, cum id repugnet (d), circulus AB circulum CD in uno tantum puncto tangit.

COROL.

(a) Lib.V.§.57.
(b) §.10.
(c) Lib.V.§.49.
(d) §.51.

COROLLARIUM III.

Si a centro circuli rectam tangentis ad ipſam tangentem recta ducatur, quæ illi ad perpendiculum inſiſtat, cadet hujuſmodi recta in punctum contactus.

53 Ut ſi a centro O circuli ABD tangentis rectam KL in puncto C ducatur ad ipſam tangentem recta perpendicularis, cadet illa in punctum contactus C. Si namque fieri poteſt, cadat hujuſmodi recta extra punctum C, eaque ſit recta OG. A centro autem O ad punctum contactus C ducatur recta OC. Hæc igitur erit tangenti KL perpendicularis (a). Poſita eſt autem etiam recta OG eidem KL perpendicularis. Ergo duæ rectæ perpendiculares cadunt ab eodem puncto O in eandem rectam KL. Id autem repugnat (b). Ergo recta OG non eſt perpendicularis tangenti KL. Eodem modo oſtendam, nullam rectam cadere poſſe a puncto O in rectam KL, quæ ſit ipſi KL perpendicularis, quin cadat in punctum contactus C; adeoque &c. Fig. 2. Tab. III.

THEOREMA VII.

Circulus circulum interius tangens, in uno tantummodo puncto ipſum tangit.

54 Circulus DF intra circulum ABC poſitus, ipſum tangat in C. Dico, hujuſmodi contactum in uno puncto tantummodo fieri. Euclid. lib. 3. p. 13.

Demonſtratio.

Si namque fieri poteſt, circulus DE tangat circulum ABC in duobus ſimul punctis C, F, ſitque punctum H centrum circuli ABC, & punctum G centrum circuli DE. Ducatur itaque per eorum centra H, G recta HC, quæ per unum Fig. 26. Tab. II.

O pun-

(a) §. 50. (b) Lib. V. §. 49.

punctum contactus C incedat. Ad alterum vero punctum contactus F ducatur a centro G recta GF, & a centro H recta HF. Cum igitur punctum G ſit centrum circuli DE, duæ rectæ CG, GF, utpote illius radii, erunt æquales (a). Quamobrem addita utrique recta GH, erunt duæ HG, GF ſimul ſumtæ æquales rectæ HC (b). Eſt autem recta HF æqualis rectæ HC; cum utraque ſit radius circuli ABC. Ergo duæ HG, GF rectæ quoque HF æquales erunt (c); ac proinde duo trianguli latera tertium æquabunt. Id autem repugnat (d). Ergo contactus circulorum DE, ABC fieri nequit in duobus punctis C, F. Itaque circulus circulum tangens &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VIII.

Si a centris duorum circulorum ſeſe exterius tangentium duæ rectæ ad punctum contactus ducantur, erunt illæ duæ rectæ lineæ in directum poſitæ.

55 Duo circuli AB, CD ſeſe exterius tangant in puncto F. A centro autem K circuli AB ducatur ad punctum F recta KF, & a centro L circuli CD ad idem punctum recta LF. Dico, rectas KF, FL eſſe in directum poſitas.

Demonſtratio.

Ducta per punctum F recta GH utrumque circulum in illo puncto tangente, utraque KF, LF illi ad perpendiculum incumbet (e); rectusque ſubinde erit uterque angulus
Fig. 25. Tab. II. KFG, LFG (f). Ergo duæ KF, LF erunt in directum poſitæ, ſeu unam eandemque rectam KL conſtituent (g). Itaque ſi a centris duorum circulorum &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) §. 10.
(b) Syn. Alg. §. 265.
(c) Ibid. §. 259.
(d) Lib. V. §. 69.
(e) §. 50.
(f) Lib. III. §. 23.
(g) Ibid. §. 49.

COROLLARIUM.

Si duo circuli ſe tangant exterius, recta eorum centra conjungens per punctum contactus tranſibit.

56 Ut ſi duo centra K, L circulorum AB, CD ſeſe exterius tangentium jungantur recta linea, hæc tranſibit per punctum contactus F. Etenim ſi fieri poteſt, tranſeat extra illud punctum, ſitque linea KOL. Cum igitur rectæ KF, LF ductæ a centris K, L ad punctum contactus F unam eandemque rectam conſtituant, recta erit utraque KL, KOL; ac proinde duæ rectæ ſpatium claudent, quo nihil abſurdius (a). Ergo &c. Euclid. lib. 3. p. 12. Fig. 25. Tab. II.

THEOREMA IX.

Si duo circuli intus ſeſe tangant, recta ducta per eorum centra tranſibit per punctum contactus.

57 Duo circuli AEB, DFB intus ſeſe tangant in puncto B. Ducatur autem per eorum centra N, O recta NO, eaque in directum producatur. Dico, futurum eſſe, ut tranſeat per punctum contactus B. Euclid. lib. 3. p. 11.

Demonſtratio.

Tranſeat namque, ſi fieri poteſt, extra punctum B, ut recta NL, ſitque punctum P centrum circuli AEB, & punctum N centrum circuli DFB. Ducantur autem radii PB, NB ad commune utriuſque punctum B. Igitur cum punctum N ſit centrum circuli DFB, rectæ NL, NB erunt æquales (b). Eadem ratione æquales erunt duæ PM, PB; cum punctum P poſitum ſit centrum circuli AEB. Addita propterea communi PN, erit recta NM æqualis duabus NP, PB ſimul ſumtis (c). Duæ autem NP, PB majores Fig. 3. Tab. III.

O 2 ſunt

(a) Lib. IV. §. 7. (b) §. 10. (c) Syn. Alg. §. 265.

ſunt reliqua NB (a). Ergo recta quoque NM rectam NB ſuperabit (b); adeoque etiam rectam NL, utpote quæ rectæ NB oſtenſa eſt æqualis. Pars igitur NM major erit ſuo toto NL, quo nihil abſurdius (c). Recta igitur conjungens centra circulorum AEB, DFB extra punctum contactus B non cadit; adeoque ſi duo circuli intus &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA X.

Si recta circulum tangat, atque a puncto contactus recta intra circulum excitetur, quæ tangenti ad perpendiculum inſiſtat, erit in illa centrum ipſius circuli.

Euclid. lib. 3. p. 19. 58 Circulum ABCD tangat recta HK in puncto C. Ex illo autem excitetur intra circulum recta CA ipſi HK ad perpendiculum inſiſtens. Dico, in recta perpendiculari CA eſſe centrum ipſius circuli ABCD.

Demonſtratio.

Etenim, ſi fieri poteſt, centrum circuli ABCD extra rectam perpendicularem CA reperiatur, ſitque illud punctum L. Ab ipſo itaque cadat in punctum contactus C recta LC. Hæc ad perpendiculum incumbet rectæ tangenti Fig. 1. Tab. III. HK (d). Eidem autem rectæ ad idem punctum C perpendiculariter inſiſtit recta CA ex hypotheſi. Ergo duæ CA, CL ſunt ſimul perpendiculares eidem rectæ HK. Hoc autem repugnat (e). Ergo punctum L non eſt centrum circuli ABCD. Eodem modo demonſtrabitur, nullum punctum extra rectam perpendicularem CA eſſe centrum circuli ABCD. Ergo hujuſmodi centrum in ipſa perpendiculari CA reperitur. Itaque ſi recta circulum tangat &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) Lib. V. §. 69. (b) Syn. Alg. §. 264. (c) Ibid. §. 257. (d) §. 50. (e) Lib III §. 50.

THEOREMA XI.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro diſtant; & quæ æqualiter a centro diſtant, ſunt æquales.

I.

59 In circulo ACDB duæ habeantur rectæ inter ſe æquales AB, CD. Dico, illas æqualiter diſtare a centro E ipſius circuli. Euclid. lib. 3. p. 14.

Demonſtratio.

Ducantur a centro E ad ipſas rectas AB, CD rectæ perpendiculares EF, EG, atque ab eodem centro ad extrema earundem puncta radii EA, EB, EC, ED. Rectæ igitur AB, CD bifariam diviſæ erunt a rectis perpendicularibus EF, EG (a). Quamobrem, cum duæ AB, CD poſitæ ſint æquales, earum quoque medietates FB, GD æquales erunt (b). Rurſus cum duæ AB, CD ſint æquales, ſicuti etiam duæ EB, ED, necnon duæ EA, EC (c), angulus ABE angulo EDC æqualis erit (d). Oſtenſum eſt autem, duo latera FB, GD triangulorum FBE, GDE eſſe æqualia, ſicuti etiam duo EB, ED. Ergo baſes quoque ipſorum triangulorum FE, EG erunt æquales (e); atque adeo rectæ AB, CD æqualiter diſtant a centro E ipſius circuli (f). Fig. 27. Tab. II.

II.

60 Viciſſim vero rectæ AB, CD ex æquo diſtent a centro E circuli ACDB, adeoque rectæ perpendiculares FE, EG ſint inter ſe æquales. Dico, æquales quoque eſſe inter ſe rectas AB, CD. Euclid. ibid.

Demon-

(a) §.39. (b) Lib.I.§.126. (c) §.10. (d) Lib.V.§.82. (e) Ibid.§.73. (f) §.23.

Demonſtratio.

Cum enim rectæ FE, EG ad perpendiculum ex hypotheſi incumbant rectis AB, CD, anguli EFB, EGD erunt recti (a); duoque propterea triangula EFB, EGD erunt rectangula (b). Igitur quadratum hypotenuſæ EB æquale erit quadratis laterum EF, FB, ſicuti etiam quadratum hypotenuſæ ED quadratis laterum EG, GD (c). Sunt autem quadrata laterum EB, ED inter ſe æqualia (d), ob æqualitatem ſcilicet rectarum EB, ED (e). Ergo duo itidem quadrata laterum EF, FB ſimul ſumta æqualia erunt quadratis laterum EG, GD ſimul pariter ſumtis (f). Æqualia autem ſunt quadrata rectarum æqualium EF, EG (g). Ergo, his ſublatis, quadratum lateris FB quadrato lateris GD æquale erit (h); atque adeo etiam ipſa latera FB, GD erunt æqualia (i). Eodem modo demonſtrabitur, æqualia eſſe etiam ſegmenta AF, CG. Igitur tota AB toti CD æqualis erit (k). In circulo itaque &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

61 Cum rectæ perpendiculares EF, EG biſariam dividant rectas AB, CD (l), ſi ſegmenta FB, GD æqualia ſunt inter ſe, etiam tota AB totam CD æquabit (m).

COROLLARIUM.

Rectæ in circulo æqualiter ab illius centro diſtantes æqualibus arcubus ſubtenduntur; & quæ æqualibus arcubus ſubtenduntur, æqualiter ab illius centro diſtant.

62 Ut ſi in circulo ACDB rectæ AB, CD æqualiter ab illius centro E diſtantes fuerint, arcus AB, CD, quibus

(a) Lib. III. §. 23. (b) Lib V. §. 29. (c) Lib. VI. §. 37. (d) Lib. I. §. 187. (e) §. 10. (f) Syn. Alg. §. 259. (g) Lib. I. §. 187. (h) Syn. Alg. §. 266. (i) Lib. I. §. 187. (k) Lib. I. §. 127. (l) §. 30. (m) Lib. I. §. 127.

quibus illæ ſubtenduntur, erunt æquales; & viciſſim ſi arcus hujuſmodi fuerint æquales, chordæ AB, CD æqualiter a centro E diſtabunt. Etenim ſi rectæ AB, CD a centro E æqualiter diſtant, æquales erunt inter ſe (a). Ergo arcus quoque AB, CD erunt æquales (b). Viciſſim ſi arcus AB, CD ſunt æquales, æquales itidem erunt rectæ AB, CD (c); ac proinde æqualiter diſtabunt a centro E circuli (d). Fig. 27. Tab. II.

THEOREMA XII.

In circulo recta, quæ per centrum tranſit, eſt omnium rectarum, quæ in ipſo circulo duci poſſunt, maxima. Aliarum vero, quæ propinquior eſt centro, remotiore major eſt.

In circulo AFC plures habeantur rectæ AC, DE, FG, quarum AC per centrum B ipſius circuli tranſeat. Euclid. lib. 3. p. 15.

I.

63 Dico primo, rectam AC eſſe omnium maximam:

Demonſtratio.

Ex centro B ipſius circuli ducantur ad extrema puncta D, E rectæ DE, radii BD, BE, conſtituaturque triangulum DBE. Manifeſtum eſt, rectas BA, BD, BC, BE eſſe inter ſe æquales (e); cum ſint radii ejuſdem circuli. Igitur tota AC æqualis erit duabus BD, BE. Sunt autem duæ BD, BE ſimul ſumtæ majores reliqua DE (f). Ergo recta quoque AC rectam DE ſuperabit (g). Eadem ratione oſtendam, rectam AC majorem eſſe recta FG, iiſque omnibus, quæ in ipſo circulo AFC reperiri poſſunt; adeoque &c. Fig. 4. Tab. III.

II.

(a) §.60. (b) §.58. (c) §.57. (d) §.59. (e) §.10. (f) Lib. V. §.69. (g) Syn. Alg. §.264.

Digitized by Google

II.

64 Dico ſecundo, rectam DE propinquiorem centro B majorem eſſe recta FG, quæ ab ipſo centro eſt remotior.

Demonſtratio.

Ducantur a centro B ad extrema puncta rectæ FG radii BF , BG , ut proinde conſtitutum habeatur triangulum FBG . Duo itaque latera BF, BG trianguli FBG æqualia erunt lateribus BD , BE trianguli DBE (a); cum omnia ſint radii ejuſdem circuli . Conſtat autem , angulum DBE majorem eſſe angulo FBG (b). Ergo baſis quoque DE major erit baſe FG (c). Recta igitur in circulo , quæ proximior eſt illius centro, remotiore major eſt ; adeoque in circulo recta &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Diameter circuli eſt omnium rectarum , quæ in ipſo circulo duci poſſunt , maxima.

65 Ex omnibus namque rectis , quæ in circulo conſtitui poſſunt , ſola diameter hujuſmodi eſt , ut per circuli centrum tranſeat (d).

COROLLARIUM II.

Omnium chordarum maxima eſt diameter.

66 Quandoquidem ex omnibus chordis ſola diameter per circuli centrum tranſit ; cum omnis recta , quæ per centrum tranſit, ſit circuli diameter (e).

COROL-

(a) §.10. (b) Syn.Alg.§.257. (c) Lib.V.§.95. (d) §. 7. (e) Ibid.

COROLLARIUM III.

Maxima rectarum, quæ in circulo conſtitui poſſunt, per illius centrum tranſit.

67 Etenim, ſi ſecus, diameter circuli non eſſet omnium maxima. Quippe altera recta haberetur in circulo, diverſa ab ipſius diametro, & ſimul major diametro.

THEOREMA XIII.

Chorda majoris arcus circuli major eſt chorda arcus minoris, & viciſſim minor chorda minorem, quam major, arcum ſubtendit.

I.

68 In circulo AFC duo ſpectentur arcus DOE, FOG; Fig. 6.
ſitque arcus DOE major arcu FOG. Dico, chordam DE Tab. IX.
majoris arcus majorem eſſe chorda FG arcus minoris.

Demonſtratio.

A centro B ipſius circuli ducantur ad extrema puncta chordarum, adeoque etiam arcuum, radii BD, BF, BG, BE. Cum igitur arcus DOE major ſit arcu FOG, angulus quoque DBE angulum FBG ſuperabit (a). Sunt autem latera DB, FB æqualia inter ſe, quemadmodum etiam latera BG, BE (b). Igitur baſis DE trianguli DBE major erit baſe FG trianguli FBG (c); adeoque &c.

II.

69 Viciſſim vero chorda DE major ſit chorda FG. Dico

(a) §.27. (b) §.10. (c) Lib.V.§.95.

arcum quoque DOE chordæ DE majorem eſſe arcu FOG chordæ FG.

Demonſtratio.

Ductis radiis DB, FB, GB; EB, ut ſupra, conſtituтiſque propterea triangulis DBE, FBG, cum duo latera DB, FB æqualia ſint inter ſe, ſicuti etiam duo GB, EB (a), & baſis DE major ſit ex hypotheſi baſe FG, angulus quoque DBE major erit angulo FBG, qui æqualibus lateribus continentur (b). Eſt autem arcus DOE ad arcum FOG, ut angulus DBE ad angulum FBG (c). Ergo arcus quoque DOE major erit arcu FOG (d). Igitur chorda majoris arcus circuli &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Circuli chorda, quo magis a centro diſtat, eo minorem arcum ſubtendit.

70. Enimvero, quo magis chorda a circuli centro diſtat, eo minor eſt (e). Ergo, quo magis a centro diſtat, minorem arcum *per hoc theorema* ſubtendit.

THEOREMA XIV.

In eodem circulo angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi uterque eidem arcui inſiſtat.

Euclid. lib. 3. p. 20. 71 Tripliciter fieri poteſt, ut angulus ad peripheriam illi arcui inſiſtat, cui angulus ad centrum incumbit.

Primus caſus.

Fig. 5. Tab. III. Eſto itaque primo in circulo ABC ad ipſius centrum D angulus BDC; ad peripheriam vero angulus BAC, eidem inſi-

(a) § 10. (b) Lib. V. § 96. (c) § 27. (d) Lib. I. § 45. (e) § 64.

inſiſtentes arcui BLC. Dico, angulum BDC duplum eſſe anguli BAC.

Demonſtratio.

Ducatur ab anguli BAC apice A per centrum D recta AL. Cum igitur duo radii DB, DA ſint æquales (a), triangulum BDA erit iſoſceles (b). Anguli ergo DAB, DBA, qui ſunt ad baſim AB, erunt æquales (c). Eſt autem angulus externus BDL æqualis duobus internis oppoſitis DAB, DBA (d). Ergo, ſi duo DAB, DBA æquales ſunt inter ſe, angulus BDL erit duplus utriuſque. Eſt igitur angulus BDL duplus anguli BAL. Eodem modo oſtendam, angulum quoque LDC duplum eſſe anguli DAC. Igitur totus BDC duplus eſt totius BAC (e); adeoque &c.

Secundus caſus,

Angulus ad centrum ſit BDC, & angulus ad peripheriam ſit BZC. Dico, angulum BDC duplum eſſe anguli BZC.

Demonſtratio.

Angulus BDC æqualis eſt duobus internis oppoſitis DZC, DCZ (f). Hi autem duo anguli æquales ſunt inter ſe (g); cum duo latera DZ, DC ſint æqualia (h). Ergo angulus BDC duplus erit anguli BZC.

Tertius caſus,

Angulus ad centrum ſit BEC in circulo GBD, & angulus ad peripheriam ſit BDC. Dico, angulum BEC duplum eſſe anguli BDC. Fig. 6. Tab. III.

 Demon-

(a) §.10. (b) Lib.V §.25. (c) Ibid. §.60. (d) Ibid. §.50. (e) Lib.I. §.144. (f) Lib.V. §.50. (g) Ibid. §.60. (h) §.10.

Demonſtratio.

Ducta enim a puncto D per centrum circuli E recta DG; angulus GEC duplus eſt anguli GDC, quemadmodum etiam angulus GEB anguli GDB, ut *ex ſecundo caſu* eſt manifeſtum. Sublatis ergo angulis GEB, GDB, erit reliquus BEC duplus reliqui BDC (a). In eodem itaque circulo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Menſura anguli ad peripheriam eſt medietas arcus, cui inſiſtit.

72 Sic menſura anguli BAC ad peripheriam poſiti, eſt Fig. 5. Tab.III. medietas arcus BLC, cui inſiſtit. Etenim totus arcus BLC eſt menſura anguli ad centrum BDC (b). Cum ergo angulus ad peripheriam BAC ſit medietas anguli BDC, nonniſi medietas arcus BLC angulum ipſum BAC metietur.

COROLLARIUM II.

Omnes anguli, qui in eadem, vel æquali circuli portione conſiſtunt, inter ſe ſunt æquales.

Euclid. lib. 3. p. 21. Fig. 5. Tab.III. 73 Anguli nimirum BAC, BZC, qui in eadem circuli portione conſiſtunt BAC, ſunt inter ſe æquales. Etenim ſinguli ſunt medietas ejuſdem anguli BDC ad centrum poſiti, eidemque arcui inſiſtentis BLC. Idipſum dicito de iis, qui in æqualibus circuli portionibus reperiuntur.

COROLLARIUM III.

Omnes anguli ad peripheriam poſiti, qui æqualibus ejuſdem peripheriæ arcubus inſiſtunt, inter ſe ſunt æquales.

74 Videlicet ſi portio FHL circuli BFL æqualis fuerit portio-

(a) Lib. I. §. 141. (b) §. 25.

portioni DBM ejuſdem circuli, anguli FHL, DBM in illis portionibus contenti, erunt inter ſe æquales. Si namque Fig. 7. Tab. III.
arcus FHL, DBM æquales ſunt inter ſe, æquales quoque erunt arcus FBL, DHM (a), quibus anguli ipſi inſiſtunt. Ergo ipſi itidem anguli FHL, DBM erunt inter ſe æquales (b).

THEOREMA XV.

Angulus in ſemicirculo conſiſtens rectus eſt: qui in portione majori, acutus; & qui in minori, major eſt recto. Viciſſim illa portio circuli eſt ſemicirculus, quæ rectum continet angulum: major ſemicirculo, quæ acútum; minor vero ſemicirculo, quæ obtuſum angulum comprehendit.

I.

75 In ſemicirculo BAD conſiſtat angulus BAD. Dico, Euclid. lib. 3. p. 31.
angulum BAD eſſe rectum.

Demonſtratio.

Ab anguli apice A ducatur per centrum C recta ACE: Manifeſtum eſt, angulum BAC eſſe medietatem anguli BCE, & angulum CAD medietatem anguli ECD (c), ut proinde totus angulus BAD medietas ſit duorum BCE, DCE. Fig. 8. Tab. III.
Duo autem anguli BCE, DCE valent duos rectos (d). Ergo angulus BAD unum rectum æquabit, ſeu erit rectus: Angulus itaque in ſemicirculo &c.

II.

76 In portione BAC circuli BCA, quæ ſit major ſemicirculo BAZ, conſiſtat angulus BZC. Dico, ipſum eſſe acutum. Fig. 9. Tab. III.

Demon-

(a) Syn. Alg. §. 266. (b) §. 74. (c) §. 71. (d) Lib. III. §. 40.

Digitized by Google

Demonſtratio.

A centro D ad extremum punctum C ducatur recta DC. Cum igitur angulus BDC ſimul cum angulo CDZ conſtituat ſummam duorum rectorum (a), angulus BDC minor erit duobus rectis. Eſt autem angulus BZC medietas anguli BDC (b). Ergo angulus BZC erit minor recto, nempe acutus; adeoqne &c.

III.

77 In portione ACD circuli AOD, quæ ſit minor ſemicirculo FAD, conſiſtat angulus ACD. Dico, angulum ipſum eſſe obtuſum. Fig. 9. Tab. III.

Demonſtratio.

Ducatur ab ipſius anguli apice C per centrum E recta CO, junganturque extrema A, D cum centro E rectis AE, DE, quæ producatur directe in F. Cum igitur duo anguli FEO, OED valeant duos rectos (c), duo AEO, OED duobus rectis majores erunt. Eſt autem angulus ACE medietas anguli AEO, & angulus DCE medietas anguli DEO, adeoque totus angulus ACD medietas duorum AEO, DEO (d). Ergo angulus ACD major erit recto, nempe erit obtuſus. Igitur &c.

IV.

78 Viciſſim angulus BAD ſit rectus. Dico, portionem BAD circuli ABED, quæ angulum ipſum comprehendit, eſſe ſemicirculum. Fig. 8. Tab. III.

Demon-

(a) Lib. II. §.40. (b) §.72. (c) Lib. III. §.40. (d) §.71.

Demonſtratio.

Si namque portio BAD ſemicirculus non eſt, erit ſegmentum majus, vel minus ſemicirculo. Non eſt autem ſegmentum majus; quia tunc angulus BAD eſſet acutus, ut patet ex *ſecunda parte* hujus. Neque eſt ſegmentum minus; quia tunc angulus BAD eſſet obtuſus, ut liquet ex *tertia*, quod eſt contra hypotheſim. Ergo portio BAD eſt ſemicirculus.

V.

79 Eodem modo demonſtrabitur, portionem BAC circuli ABCZ, quæ angulum acutum BZC continet, eſſe majorem ſemicirculo. Portionem quoque ACD circuli AOD, quæ obtuſum angulum ACD comprehendit, a ſemicirculo deficere. Itaque angulus in ſemicirculo &c. quod erat oſtendendum. Fig. 5. Fig. 9. Tab. III.

COROLLARIUM.

80 *Angulus in portione circuli conſiſtens eo major eſt; quo minor eſt ipſa portio; & eo minor, quo ipſa portio eſt major*. Viciſſim *portio circuli major eſt, quo minorem, & eo minor, quo majorem angulum comprehendit*.

THEOREMA XVI.

Chordæ parallelæ æquales circuli arcus intercipiunt;

81 In circulo FLMG ſint duæ chordæ parallelæ HK, LM, arcus intercipientes HL, MK. Dico, arcus hujuſmodi HL, MK eſſe inter ſe æquales. Fig. 4. Tab. III.

Demon-

Demonſtratio.

Ducantur a centro B circuli ad illarum chordarum extrema radii BH, BL, BM, BK, junganturque extrema H, M recta HM. Manifeſtum eſt, angulum HBL duplum eſſe anguli HML, & angulum MBK duplum eſſe anguli MHK (a). Sunt autem anguli HML, MHK inter ſe æquales (b); cum ſint alterni, producti a recta HM incidente in parallelas HK, LM. Ergo anguli quoque HBL, MBK, erunt inter ſe æquales (c); cumque ſint ad centrum, arcus ſimiliter HL, MK, quibus inſiſtunt, erunt inter ſe æquales (d). Itaque chordæ parallelæ &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XVII.

Omnis quadrilateri circulo inſcripti duo quicumque anguli ex adverſo poſiti valent duos rectos.

Euclid. lib. 3. p. 22. 82 Circulo AOD inſcriptum habeatur quadrilaterum ABDC. Dico, duos ipſius angulos ex adverſo poſitos ACD, ABD, quemadmodum etiam duos BAC, CDB ſimul ſumtos, ſummam duorum rectorum conficere.

Demonſtratio.

Fig. 9. Tab. II. Ductis a centro E circuli ad apices angulorum A, C, D radiis EA, EC, ED, productoque in directum radio CE in O, angulus ABD erit medietas anguli AED, & angulus ACD erit medietas duorum AEO, DEO (e), ut proinde duo anguli ABD, ACD medietas ſint eorum, qui circa punctum E fieri poſſunt. Anguli autem, qui fieri poſſunt circa punctum E valent quatuor rectos (f). Ergo anguli ABD, ACD duobus rectis æquales erunt. Rurſus quatuor anguli quadrilateri

(a) §.71.
(b) Lib IV. §.15.
(c) Lib. I. §.127.
(d) §.27.
(e) §.71.
(f) Lib. III. §.44.

teri, ſi ipſi ſimul ſumantur, ſummam quatuor rectorum conficiunt (a). Ergo ſi duo anguli ABD, ACD quadrilateri ABDC æquales ſunt duobus rectis, reliqui itidem duo BAC, CDB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur quadrilateri &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XVIII.

Si recta linea circulum tangat, & a puncto contactus recta intra circulum ducatur, erunt anguli in puncto contactus producti, æquales iis, qui in alternis ipſius circuli portionibus conſiſtunt.

83 Recta linea EF tangat circulum BGD in puncto B, a quo intra ipſum circulum recta ducatur. Euclid. lib. 3. p. 32.

Primus caſus.

Et quidem primo tranſeat hujuſmodi recta per centrum X ipſius circuli, ſitque recta BA. In ſegmentis autem circuli habeantur anguli BGA, BDA. Dico, angulum EBA pro- Fig. 1. Tab. III.
ductum in puncto contactus B a recta tangente EF ſimul cum recta BA intra circulum ducta, æqualem eſſe angulo BDA, & angulum FBA angulo BGA, qui in alternis ipſius circuli portionibus conſiſtunt.

Demonſtratio.

Cum enim recta BA tranſeat per centrum X circuli, atque in punctum contactus B incidat, ad perpendiculum rectæ tangenti EF incumbit (b); rectique proinde erunt anguli EBA, FBA (c). Recti autem ſunt etiam anguli BGA, BDA, utpote in ſemicirculo conſiſtentes (d). Ergo angulus EBA æqualis erit angulo BDA, & angulus FBA angulo BGA (e).

(a) Lib. VI. §. 16. (b) §. 50. (c) Lib. III. §. 23. (d) §. 75. (e) Lib. III. §. 37.

Digitized by Google

Secundus caſus.

Cadat modo recta a puncto contactus B intra circulum ducta extra illius centrum X, eaque ſit recta BD. In portione autem BCD fiat angulus BCD, & in portione majori BGD fiat angulus BGD. Dico, angulum FBD angulo BGD, & angulum EBD angulo BCD eſſe æqualem.

Demonſtratio.

Ducatur a puncto contactus B per centrum X recta BA; & jungantur puncta A, D recta AD; ſitque proinde inſcriptum circulo BGD quadrilaterum BADC. Cum igitur angulus BDA in ſemicirculo conſiſtat, rectus erit (a). Quamobrem reliqui duo anguli DBA, BAD trianguli ABD ſummam conficient unius recti (b). Rectus autem eſt angulus FBA (c). Ergo duo anguli DBA, BAD angulo FBA æquales erunt. Sublato idcirco communi angulo DBA, erit reliquus BAD reliquo FBD æqualis (d). Eſt autem angulus BGD æqualis angulo BAD (e); cum ambo in eadem circuli portione conſiſtant. Ergo angulus quoque BGD angulum FBD æquabit (f). Rurſus cum duo anguli BCD, BGD quadrilateri BGDC valeant duos rectos (g), duobus EBD, FBD, qui itidem valent duos rectos (h), æquales erunt (i). Oſtenſum eſt autem, angulum FBD æqualem eſſe angulo BGD. Ergo reliquus EBD reliquo BCD erit æqualis (k). Itaque ſi recta linea circulum tangat &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) §.75.
(b) Lib.V. §.47.
(c) §.50.
(d) Syn.Alg.§.266.
(e) §.73.
(f) Syn.Alg.§.262.
(g) §.82.
(h) Lib.III. §.40.
(i) Syn.Alg.§.261.
(k) Ibid.§.266.

COROLLARIUM I.

Si duæ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ circulum tangant, & puncta contactus recta jungantur, anguli in punctis contactus producti ſunt æquales.

84 Ut ſi a puncto D ducantur duæ rectæ DE, DF circulum ABC tangentes in duobus punctis A, C, ipſaque puncta A, C jungantur recta AC, anguli DAC, DCA erunt æquales, quemadmodum etiam anguli EAC, FCA. Etenim uterque angulus DAC, DCA æqualis eſt angulo ABC in alterna circuli portione conſtituto *per hoc theorema*. Ergo ipſi anguli DAC, DCA erunt inter ſe æquales (a). Rurſus cum tam duo DAC, EAC, quam duo DCA, FCA valeant duos rectos (b), erunt duo DAC, EAC duobus DCA, FCA æquales (c). Sublatis ergo æqualibus DAC, DCA, reliquus EAC reliquo FCA æqualis erit (d); adeoque &c. Fig. 11. Tab. III.

COROLLARIUM II.

Duæ rectæ circulum tangentes, ſi ab eodem puncto ductæ fuerint, erunt inter ſe æquales.

85 Nimirum duæ DA, DC ductæ ab eodem puncto D, circulumque ABC tangentes in punctis A, C, erunt inter ſe æquales. Etenim ducta per puncta contactus recta AC, anguli DAC, DCA erunt æquales (e). Ergo latera quoque DA, DC trianguli DAC erunt inter ſe æqualia (f); ac proinde &c. Fig. 11. Tab. III.

(a) Syn. Alg. §. 259.
(b) Lib. III. §. 40.
(c) Syn. Alg. §. 259.
(d) Ibid. §. 266.
(e) §. 84.
(f) Lib. V. §. 63.

THEOREMA XIX.

Si in circulo punctum aliquod accipiatur a centro circuli diverſum, & ab eo quamplures rectæ in peripheriam ducantur, illa erit omnium maxima, quæ per circuli centrum tranſit : minima illius complementum. Aliarum vero proximior maximæ remotiore major erit. Duæ porro dumtaxat inter ſe æquales ab illo puncto in peripheriam cadere poſſunt.

Euclid. lib. 3. p. 7. In circulo ACGH punctum F accipiatur diverſum a centro E ipſius circuli. Ab illo autem ducantur ad peripheriam circuli quamplures rectæ lineæ FA, FB, FC, FG, quarum FA per centrum E ipſius circuli tranſeat, eaque directe producatur in D.

I.

86 Dico primo, rectam FA per circuli centrum E tranſeuntem, eſſe omnium aliarum maximam.

Demonſtratio.

Junctis punctis E, B radio EB, cum duæ EA, EB ſint æquales (a), utpote radii ejuſdem circuli, addita communi EF, erunt duæ BE, EF rectæ AF æquales (b). Duæ autem BE, EF majores ſunt recta BF (c). Ergo recta quoque AF rectam BF ſuperabit (d). Eodem modo oſtendam, rectam AF majorem eſſe recta CF, iiſque omnibus, quæ a puncto F in circuli peripheriam AGH cadere poſſunt. Eſt itaque recta FA harum omnium maxima.

Fig. 12. Tab. III.

II.

(a) §. 10. (b) Syn. Alg. §. 265. (c) Lib. V. §. 69. (d) Syn. Alg. §. 264.

II.

87 Dico ſecundo, complementum FD maximæ FA eſſe omnium minimam.

Demonſtratio.

A centro E ad punctum G ducatur radius EG. Cum igitur duæ EF, FG majores ſint reliqua EG (a), ſitque recta EG rectæ ED æqualis (b), duæ EF, FG recta quoque ED majores erunt (c) Sublata propterea communi EF, erit reliqua FG major reliqua FD (d). Idipſum eodem modo de ceteris FC, FB demonſtrabitur. Recta igitur FD eſt omnium minima.

III.

88 Dico tertio, rectam FB proximiorem maximæ FA majorem eſſe remotiore FC.

Demonſtratio.

Ducatur radius EC. Itaque cum duæ EB, EC ſint æquales (e), & recta EF ſit communis utrique triangulo BEF, CEF, duo triangula BEF, CEF habebunt duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri. Eſt autem angulus BEF major angulo CEF (f). Ergo baſis quoque BF baſe CF major erit (g). Eadem ratione recta CF major erit recta GF, atque ita de ceteris.

IV.

89 Dico quarto, binas tantum rectas inter ſe æquales a puncto F in peripheriam cadere poſſe.

Demon-

(a) Lib.V. §.69. (b) §.10. (c) Syn.Alg. §.264. (d) Ibid. §.269. (e) § 10. (f) Sin.Alg. §.257. (g) Lib.V. § 95.

Demonſtratio.

Sumatur arcus DH æqualis arcui DG, & ducantur rectæ EG, EH. Cum ergo arcus GD, DH ſint æquales, æquales itidem erunt anguli DEH, GED(a). Æqualia ſunt autem etiam duo latera EG, EH triangulorum GEF, FEH(b), & latus EF eſt utrique triangulo commune. Ergo baſes quoque GF, FH æquales erunt (c). Duæ itaque æquales rectæ cadere poſſunt a puncto F in peripheriam AGH. Quod autem tantum duæ, ex eo oſtenditur, quod tertia linea eſſet vel proximior maximæ FA, vel ab ea remotior, quam ſint duæ FG, FH, ut patet. Ergo eſſet major, vel minor ipſis FG, FH, ut ex §. 88. eſt manifeſtum. Duæ igitur tantummodo inter ſe æquales a puncto F in peripheriam duci queunt. Si ergo in circulo punctum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Punctum in area circuli, a quo tres rectæ æquales in peripheriam cadunt, eſt centrum ipſius circuli.

90 Ut ſi tres rectæ EB, EC, EG fuerint inter ſe æqua-
Euclid. lib. 3. p. 9. les, punctum E erit centrum circuli AGH. Neque enim a puncto, quod non ſit centrum circuli, tres rectæ inter ſe æquales in illius peripheriam cadere poſſunt (d).

COROLLARIUM II.

Si in circulo duæ rectæ æquales ſeſe mutuo biſariam dividant, punctum ſectionis erit centrum illius circuli.

91 Hoc enim ipſo tres rectæ inter ſe æquales ab illo puncto in ipſius circuli peripheriam cadunt.

THEO-

(a) §. 27. (b) §. 10. (c) Lib. V. §. 73. (d) §. 89.

THEOREMA XX.

Si extra circulum punctum aliquod ſumatur, a quo in ipſum circulum plures rectæ ducantur, earum, quæ in concavam ipſius circuli peripheriam cadunt, maxima eſt, quæ per centrum tranſit; aliarum vero proximior maximæ remotiore major eſt. At earum, quæ in convexam cadunt peripheriam, minima eſt illa, quæ inter datum punctum, & circuli diametrum directe jacet; aliarum vero, quæ eſt minimæ proximior remotiore minor eſt. Duæ poſtremo dumtaxat inter ſe æquales ab illo puncto in ipſum circulum cadere poſſunt.

Extra circulum ZDN ſumatur punctum A, a quo in Euclid. ipſum circulum quamplures rectæ ducantur AD, AK, AZ, lib. 3. ex quibus recta AZ per ipſius circuli centrum P tranſeat. p. 8.

I.

92 Dico primo, rectarum AD, AZ, AK, quæ in concavam Fig. 11. ipſius circuli peripheriam cadunt, maximam eſſe rectam Tab. III. AZ, quæ per centrum P tranſit.

Demonſtratio.

Ducatur ad punctum K radius PK. Duæ itaquæ PK, PZ erunt inter ſe æquales (a). Quamobrem addita utrique recta PA, erunt duæ KP, PA ſimul ſumtæ æquales rectæ ZA (b). Duæ autem KP, PA majores ſunt recta KA (c). Ergo recta quoque ZA ipſam KA ſuperabit (d). Eodem modo demonſtrabitur, rectam AZ majorem eſſe recta AD, iiſque omnibus, quæ in concavam ipſius circuli peripheriam cadere poſſunt. Eſt ergo recta AZ omnium maxima.

II.

(a) §. 10. (b) Syn. Alg. §. 265. (c) Lib. V. §. 69. (d) Syn. Alg. §. 264.

II.

93 Dico ſecundo, rectam AK proximiorem maximæ AZ majorem eſſe remotiore AD.

Demonſtratio.

Ducto radio PD, cum duæ PK, PD ſint æquales (a), & recta PA communis utrique triangulo KPA, DPA, duo ipſa triangula duo latera duobus lateribus æqualia habebunt, alterum alteri. Eſt autem angulus KPA major angulo DPA (b): Ergo baſis quoque KA baſe DA major erit (c).

III.

94 Dico tertio, rectarum AC, AO, AX, quæ cadunt in convexam peripheriam, minimam eſſe rectam AC, quæ directe jacet inter datum punctum A, & diametrum CZ.

Demonſtratio.

Ducto radio PO, duæ PO, OA majores erunt recta PA (d). Duæ autem PO, PC ſunt inter ſe æquales (e). Ergo illis ſublatis, reliqua OA major erit reliqua CA (f). Eodem modo oſtendam, rectam XA ſuperare eandem CA. Eſt itaque recta CA omnium minima.

IV.

95 Dico quarto, rectam OA proximiorem minimæ CA minorem eſſe remotiore XA.

Demonſtratio.

A centro P ad punctum X ducatur radius PX. Evidens eſt,

(a) §.10. (b) Syn.Alg.§.257. (c) Lib.V.§.95. (d) Lib.V.§.69. (e) §.10. (f) Syn.Alg.§.269.

eſt, duo latera PX, XA trianguli PXA majora eſſe duobus lateribus PO, OA trianguli POA (a). Duo autem PX, PO ſunt æqualia (b). Ergo illis ſublatis, reliquum XA majus erit reliquo OA (c).

V.

96 Poſtremo dico, duas tantum inter ſe æquales a puncto A in circulum ipſum XZN cadere poſſe.

Demonſtratio.

Sumatur arcus CN æqualis arcui CO, & ducatur radius PN, necnon recta NA. Quoniam igitur arcus CN, CO ſunt æquales, æquales itidem erunt anguli NPC, CPO (d). Sunt autem æqualia etiam latera PO, PN (e), & latus PA eſt commune utrique triangulo APO, APN. Ergo baſis quoque NA baſi AO æqualis erit (f). Eodem modo oſtendam, duas rectas æquales cadere poſſe ab eodem puncto A in concavam ejuſdem circuli peripheriam. Quod autem nonniſi duæ hujuſmodi rectæ eſſe poſſint, patet ex iis, quæ modo demonſtravimus. Etenim altera recta cadens in convexam peripheriam, vel eſſet proximior minimæ CA, & ideo minor, quam duæ datæ; vel ab ea remotior, & ideo major illis. Similiter altera recta in concavam cadens peripheriam, vel eſſet proximior maximæ AZ, quam illæ ſint, & ideo eſſet illis major; vel eſſet ab ea remotior, & ſic ab illis duabus deficeret. Itaque duæ tantum inter ſe æquales cadere poſſunt a puncto A in ipſum circulum XZN; ac proinde ſi extra circulum &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXI.

Radius circuli ſextam peripheriæ partem ſubtendit.

97 Recta FH in circulo DHM ſit æqualis radio AH ejuſ- Fig. 7. Tab. III.

R dem

(a) Lib. V. §. 72. (b) §. 10. (c) Syn Alg. §. 269. (d) § 27. (e) §. 10. (f) Lib. V §. 75.

dem circuli. Dico, arcum FH, cui ipſa recta FH ſubtenditur, æquare ſextam partem peripheriæ DHM ipſius circuli.

Demonſtratio.

Ducatur ad extremum F radius AF. Cum igitur tres rectæ AF, FH, HA ſint æquales (a), triangulum HAF erit æquilaterum (b), adeoque æquiangulum (c); ac proinde angulus FAH erit tertia pars duorum rectorum, ſive ſexta pars quatuor rectorum (d). Eſt autem arcus FH ad totam peripheriam DHM, ut angulus FAH ad quatuor rectos (e). Ergo arcus FH erit ſexta pars totius peripheriæ DHM. Radius itaque circuli &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

98 Cum igitur quævis *circini* apertura æqualis ſit radio circuli ea deſcripti, manifeſtum eſt, quam recte *circinus* Italice *il ſeſto* vocetur. Sextam quippe peripheriæ partem ſubtendit.

THEOREMA XXII.

Si duæ rectæ parallelæ circulum tangant, & per puncta contactus recta ducatur, tranſibit illa per centrum ipſius circuli.

99 Duæ rectæ lineæ EF, MN circulum tangant BGD in
Fig. 10. Tab. III. punctis B, A, ſintque rectæ EF, MN inter ſe parallelæ. Per puncta autem contactus B, A ducatur recta BA. Dico, rectam hujuſmodi tranſire per centrum ipſius circuli.

Demonſtratio.

Cum enim per hypotheſim rectæ EF, MN ſint parallelæ, æquales erunt anguli alterni EBA, BAN (f). Eſt autem

(a) §. 10. (b) Lib. V. § 24. (c) Ibid. §. 62. (d) Ibid. §. 41. (e) §. 28. (f) Lib. IV. §. 15.

tem angulus EBA æqualis angulo BDA poſito in alterna circuli portione BDA, quemadmodum etiam angulus BAN angulo BGA in alterna itidem circuli portione BGA exiſtenti (a). Ergo duo itidem anguli BDA, BGA inter ſe mutuo æquales erunt. Manifeſtum eſt autem, duos angulos BDA, BGA valere duos rectos (b); cum ſint oppoſiti in quadrilatero BGAD circulo BGD inſcripto. Ergo uterque BDA, BGA erit rectus; ac proinde circuli portiones BDA, BGA erunt ſemicirculi (c). Determinantur autem a recta BA. Ergo recta BA per centrum tranſit circuli BGD. Eſt enim ipſius circuli diameter. Itaque ſi duæ rectæ &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

100 Oſtenſa rectitudine anguli BDA, aliter demonſtrari poteſt, rectam BA tranſire per centrum circuli BGD. Cum enim angulus EBA ſit æqualis angulo BDA, ſi angulus BDA eſt rectus, rectus quoque erit angulus EBA. Duo autem anguli EBA, FBA valent duos rectos (d). Ergo uterque erit rectus. Quamobrem recta BA ad perpendiculum incumbet tangenti EF (e); atque ideo tranſibit per centrum ipſius circuli DGB (f).

THEOREMA XXIII.

Si duæ rectæ lineæ ex eodem puncto ductæ circulum tangant, & per puncta contactus recta ducatur, tranſibit illa extra centrum ipſius circuli.

101 Extra circulum ABC ſumatur punctum D, a quo in ipſum circulum ducantur duæ rectæ tangentes DA, DC. Fig. 11.
Per puncta autem contactus A, C tranſeat recta AC. Dico, Tab. III.
rectam hujuſmodi cadere extra centrum ipſius circuli.

R 2 *Demon-*

(a) §. 83. (b) §. 82. (c) §. 78. (d) Lib. III. §. 40. (e) Ibid. §. 24. (f) §. 58.

Demonſtratio.

Cum enim duo anguli DAC, DCA æquales ſint inter ſe (a), ſintque ambo ſimul ſumti minores duobus rectis (b), uterque erit acutus. Eſt autem angulus ACD æqualis angulo ABC, qui fit in alterna portione ABC (c). Ergo angulus quoque ABC erit acutus; ac proinde portio ABC circuli ACB major erit ſemicirculo (d). Determinatur autem a recta AC. Ergo recta AC inæqualiter circulum dividit ACB, ac proinde extra ipſius circuli centrum cadit. Itaque ſi duæ rectæ lineæ &c. quod erat oſtendendum.

ELE

(a) §.84. (b) Lib.V.§.42. (c) §.83. (d) §.79.

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER VIII.

De planorum ſectione, & ſitu.

DE *planorum ſectione, & ſitu* nonnulla hic exhibemus, quæ magis ſcitu neceſſaria reputamus, ex *lib. XI. Elementorum* Euclidis præſertim deſumta.

DEFINITIO I.

1 P*Lanum*, ſive *plana ſuperficies ea eſt, quæ ſuis ex æquo interjicitur extremis*, ſeu quæ eſt hujuſmodi, ut duo ipſius puncta ſimul recta linea jungi nequeant, quin tota in ipſa ſuperficie conſiſtat. Vide quæ diximus de *linea recta* ex Platone (a).

DEFINITIO II.

2 *Illa recta linea dicitur plano ad perpendiculum incumbere, quæ perpendicularis eſt rectis omnibus, quæ in ipſo plano per illud punctum duci queunt*. Sic recta FE perpendicularis erit plano ABCD, ſi perpendicularis fuerit rectis AC, BD, omnibusque aliis ductis in ipſo plano per punctum E. Fig. 14. Tab. III.

DEFINITIO III.

3 *Recta ad planum inclinata, ſeu oblique plano inſiſtens, eſt illa, quæ cum una rectarum in ipſo plano per illud punctum, cui illa*

(a) Lib. III. §. 5.

cui illa incumbit, traducta angulum acutum conſtituit. Ut ſi angulus GEH, quem recta GE efficit in puncto E cum recta EH, fuerit acutus, recta GE erit ad planum ABCD inclinata.

DEFINITIO IV.

4 *Angulus inclinationis lineæ rectæ ad planum eſt angulus ille acutus, quem recta ipſi plano inclinata cum altera in pla-* Fig. 14. Tab. III. *no ducta conſtituit.* Sic angulus GEH eſt *angulus inclinationis* rectæ GE ad planum ABCD.

SCHOLION.

5 Ut determinetur *angulus inclinationis* lineæ rectæ ad planum, ducenda eſt recta perpendicularis ab uno ſublimi ipſius rectæ puncto ad ipſum planum, ſimulque recta linea jungenda ſunt illa plani puncta, quibus hujuſ- Fig. 14. Tab. III. modi rectæ inſiſtunt. Sic ducta e puncto G ad planum ABCD recta perpendicularis GH, junctiſque punctis E, H recta EH, ita ut fiat triangulum GEH, angulus acutus GEH erit *angulus inclinationis* rectæ lineæ GE ad planum ABCD.

DEFINITIO V.

6 *Communis ſectio duorum planorum eſt illa linea, quæ utrique plano eſt communis.* Ut ſi planum EFGH ſecet pla- Fig. 15. Tab. III. num ACDB, ſitque linea FG utrique plano communis, hæc erit communis ſectio planorum EFGH, ACDB.

DEFINITIO VI.

7 *Illud planum dicitur alteri ad perpendiculum incumbere, quod ita illi inſiſtit, ut non magis in unam, quam in alteram illius partem inclinet.* Ut ſi planum EHGF ita incumbat plano ACDB, ut non magis inclinet in partem D, quam in par-

in partem C, planum EHGF ad perpendiculum inſiſtet plano ACDB.

COROLLARIUM.

8 *Omnes rectæ ductæ in plano, quod alteri ad perpendiculum incumbit, communique eorum ſectioni perpendiculariter inſiſtentes, perpendiculares ſunt plano, cui illud inſiſtit.* Rectæ nimirum *ab*, *cd* ductæ in plano EHGF, & communi eorum ſectioni GF perpendiculares, plano quoque ACDB ſunt perpendiculares. Etenim ſi ſecus, planum EHGF plano ACDB ad perpendiculum minime incumberet.

DEFINITIO VII.

9 *Unum planum dicitur alteri oblique inſiſtens, cum ita illi incumbit, ut magis in unam, quam in alteram illius partem inclinet.* Sic planum FEGH dicitur oblique incumbens Fig. 16. Tab. III. plano ABCD, quia magis tendit in partem C, quam in partem B ipſius plani ABCD.

DEFINITIO VIII.

10 *Angulus inclinationis plani ad planum eſt angulus, quem efficiunt rectæ, quarum una in uno, altera in altero plano reperitur, & communi ſectioni perpendiculariter inſiſtunt.* Sic *angulus inclinationis* plani FEGH ad planum ABCD erit an- Fig. 16. Tab. III. gulus *abd*, quem efficiunt rectæ *ab*, *bd* ductæ in ipſis planis, communique eorum ſectioni GF perpendiculares.

COROLLARIUM.

11 *Arcus circuli, quo determinatur quantitas anguli* abd *inclinationis plani* FEGH *ad planum* ABCD, *definit magnitu-* Fig. 16. Tab. III. *dinem inclinationis plani* FEGH *ad planum* ABCD.

DEFI-

DEFINITIO IX.

Fig. 17. Tab. III. 12 *Illa plana vocantur parallela, quæ æqualiter ubique inter ſe diſtant*. Hujuſmodi ſunt plana ABCD, EFGH. Contra vero *illa non ſunt parallela, quorum diſtantia a ſe mutuo eadem ubique non eſt*. Vide quæ diximus de *lineis parallelis, & non parallelis*.

COROLLARIUM.

13 *Plana parallela licet in infinitum directe producantur; nunquam ſe mutuo ſecare poſſunt*. Sectio namque fieri nequit, niſi ad ſe mutuo continuo magis accedant, ac proinde niſi eorum diſtantiæ ſint inæquales.

THEOREMA I.

Ex eodem plani puncto una tantum recta ipſi plano perpendicularis ad eandem partem excitari poteſt.

Euclid. lib. 11. p. 13. 14 In plano ABCD ſumatur punctum E, ex quo excitetur recta EF plano ABCD ad perpendiculum incumbens. Dico, ex eodem puncto E ad eandem partem F alteram rectam excitari non poſſe, quæ ſit ipſi plano perpendicularis.

Demonſtratio.

Si fieri poteſt, ſit altera perpendicularis EG. Cum igitur utraque recta EF, EG debeat ad perpendiculum incumbere omnibus rectis, quæ in ipſo plano per punctum E duci poſſunt (a), utraque EG, EF erit eidem rectæ, nimirum EH, perpendicularis. Hoc autem manifeſte repugnat (b). Ergo recta EG non eſt plano ABCD perpendicularis, & eadem ratione nulla alia, niſi recta EF. (Fig. 14. Tab. III.)

Ex

(a) §. 2. (b) Lib. III. §. 30.

Ex eodem itaque plani puncto &c: quod erat oſtendendum.

THEOREMA II.

Ex puncto extra planum ſumto una tantum recta perpendicularis in ipſum planum cadere poteſt.

15 Extra planum ABCD ſumatur punctum G, ex quo in ipſum planum cadat recta perpendicularis GH. Dico, ex eodem puncto G cadere non poſſe alteram rectam perpendicularem in ipſum planum. Euclid. lib. 11. p. 13.

Demonſtratio.

Etenim, ſi id poteſt fieri, ſit altera recta GE plano ABCD ad perpendiculum incumbens. Ducatur autem a puncto E ad punctum H in ipſo plano recta EH. Cum ergo utraque GH, GE inſiſtat plano ABCD ad perpendiculum, utraque perpendicularis erit eidem rectæ EH (a). Id autem contingere nequit (b). Ergo recta GE non eſt plano ABCD perpendicularis. Ex eodem itaque puncto &c. quod erat oſtendendum. Fig. 14. Tab. III.

THEOREMA III.

Recta perpendicularis minima eſt omnium rectarum, quæ ex eodem puncto in ipſum planum cadere poſſunt.

16 Ex puncto G ſumto extra planum ABCD cadat in ipſum planum recta perpendicularis GH. Dico, hanc eſſe minimam omnium, quæ a puncto G in ipſum planum ABCD cadere poſſunt. Fig. 14. Tab. III.

S Demon-

(a) §. 2. (b) Lib. V. §. 49.

Demonſtratio.

Ducatur in ipſo plano per punctum H recta *ab*. Evidens eſt, rectam GH eſſe minimam omnium rectarum, quæ a puncto G in ipſam *ab* duci queunt (a); cum recta GH ſit ipſi *ab* perpendicularis (b). Eadem ratione, ducta alia quacumque linea per punctum H in ipſo plano, recta GH, utpote illi ad perpendiculum incumbens (c), erit omnium, quæ in illam ex eodem puncto G cadere poſſunt, minima. Recta igitur GH eſt minima omnium, quæ a puncto G in planum ABCD cadere queunt; adeoque recta perpendicularis &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA IX.

Si una recta linea quoad unam ſui partem cum plano coincidat, quoad omnes ſuas partes in eodem erit.

Euclid. lib. 11. p. 1. 17 Pars *a*E rectæ alicujus lineæ coincidat cum plano ABCD, nempe in ipſo plano reperiatur. Dico, hujuſmodi rectam quoad omnes ſuas partes in ipſo plano reperiri, ſive cum illo conincidere.

Demonſtratio.

Quandoquidem, ſi fieri poteſt, una pars illius rectæ lineæ extra planum tendat, ſitque pars EG. Certum eſt, extremum punctum E partis *a*E recto tramite moveri poſſe ſuper Fig. 14. Tab. III. planum ABCD, ſuoque recto fluxu lineam rectam deſcribere E*b*, unam eandemque rectam conſtituentem cum parte, ſive ſegmento *a*E. Ergo, cum linea *a*EG poſita ſit recta, duæ rectæ *a*EG, *a*E*b* habebunt commune ſegmentum *a*E. Id autem plane repugnat (d). Ergo una pars rectæ lineæ nequit cum plano coincidere, & altera in ſublimi extra illud tendere, quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) Lib. III. §. 57. (b) §. 2. (c) §. 2. (d) Lib. III. §. 48.

THEOREMA V.

Duæ rectæ lineæ parallelæ, quemadmodum etiam duæ concurrentes in puncto, atque in illo ſeſe mutuo ſecantes, in eodem plano reperiuntur.

I.

18 Sint duæ rectæ parallelæ AB, CD. Dico, illas in eodem plano conſiſtere.

Demonſtratio.

Poteſt recta CD recto tramite moveri, & tendere in rectam AB, ut illi tandem congruat, quin earum paralleliſmus turbetur. Atqui recta CD hujuſmodi motu planam ſuperficiem deſcribet (a); cum omnes lineæ *ab*, *cd*, *ef*, *gh* &c. ex hoc motu productæ, in eademque ſuperficie conſiſtentes, ſint rectæ. Ergo rectæ parallelæ AB, CD in eodem plano reperiuntur. Fig. 13. Tab. I.

II.

19 Duæ rectæ lineæ AE, CE ſimul concurrant in puncto E. Duæ quoque AB, CD in illo ſeſe mutuo dividant. Dico, tam duas AE, CE, quam duas AB, CD in eodem plano conſiſtere. Euclid. lib. 11. p. 2.

Demonſtratio.

Etenim poteſt recta AB eo tramite ſic moveri circa punctum E, ut congruat rectæ CD, & plana ſuperficies ex hoc motu conſurgat. Ergo tam duæ rectæ AE, CE, quam duæ AB, CD in eodem plano conſiſtunt. Duæ itaque rectæ &c. quod erat oſtendendum. Fig. 14. Tab. I.

(a) §. 1.

THEOREMA VI.

Duæ rectæ lineæ eidem plano ad perpendiculum incumbentes, ſunt inter ſe parallelæ.

Euclid. lib. 11. p. 6. 20 Plano ABCD ad perpendiculum incumbant duæ rectæ FE, GH. Dico, rectas FE, GH eſſe inter ſe parallelas.

Demonſtratio.

Ducatur in ipſo plano a puncto E ad punctum H recta EH. Cum igitur utraque FE, GH ad perpendiculum incumbat plano ABCD, utraque perpendicularis erit rectæ EH (a), quæ in ipſo plano ducta eſt. Igitur rectus erit uterque angulus FEH, GHE (b). Sunt autem duo hujuſmodi anguli interni ad eaſdem partes, & ipſæ rectæ FE, GH in eodem plano conſiſtunt. Ergo duæ FE, GH ſunt inter ſe parallelæ (c). Duæ itaque rectæ lineæ &c. quod erat oſtendendum.

Fig. 14. Tab. III.

THEOREMA VII.

Si una duarum parallelarum fuerit plano perpendicularis; altera quoque eidem plano perpendicularis erit.

Euclid. lib. 11. p. 8. 21 Sint duæ rectæ parallelæ FE, GH. Harum autem una FE plano ABCD ad perpendiculum inſiſtat. Dico, alteram quoque GH eidem plano ABCD perpendicularem eſſe.

Demonſtratio.

Moveatur recta GH ſuper planum ABCD ea ratione, ut illi ſemper inſiſtat, eandemque ad illud inclinationem retineat, pergatque verſus rectam FE. Evidens eſt, congruentibus

Fig. 14. Tab. III.

(a) §. 2. (b) Lib. III. §. 23. (c) Lib. IV. §. 9.

tibus ſimul punctis earum extremis H, E, totam GH toti FE congruere debere. Quandoquidem, ſi ſecus res contingeret, duæ rectæ FE, GH non eſſent parallelæ, contra hypotheſim, utpote in puncto concurrentes, ſicuti duæ FE, GE. Congruet ergo tota GH toti FE. Ergo ſicuti recta FE perpendicularis eſt plano ABCD, ita recta GH eidem plano perpendicularis erit; ac proinde ſi una &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VIII.

Si duæ rectæ in plano ductæ ſeſe in puncto ſecuerit, ex quo erigatur recta duabus illis perpendicularis, hæc quoque ipſi plano ad perpendiculum incumbet.

22 In plano ABCD ducantur duæ rectæ AC, BD, quæ ſeſe mutuo quomodocumque ſecent in puncto E. Ex hoc autem ſectionis puncto erigatur recta FE, quæ ſit utrique AC, BD perpendicularis. Dico, rectam FE plano quoque ABCD, ad perpendiculum inſiſtere. Euclid. lib. 11. p. 4.

Demonſtratio.

Etenim poteſt recta AC ſic moveri ſuper planum ABCD circa punctum E, ut tota ſemper in illo ſit, & rectæ BD plane congruat, quin recta FE unquam deſinat ad perpendiculum rectæ rotanti AC incumbere. Ergo recta EF perpendicularis eſt toti plano ABCD (a), utpote ad perpendiculum inſiſtens omnibus rectis, quæ in ipſo plano per punctum E duci poſſunt. Igitur ſi duæ rectæ in plano &c. quod erat oſtendendum. Fig. 14. Tab. III.

THEO-

(a) §. 2.

THEOREMA IX.

Si in plano deſcribatur circulus, ex cujus centro erigatur recta ipſi plano perpendicularis, æquales erunt omnes rectæ, quæ in puncto in illa ſumto in peripheriam ipſius circuli cadere poſſunt.

23 In plano ABCD deſcribatur circulus GH, ex cujus centro F erigatur recta FE ipſi plano ABCD perpendicularis. Ex puncto autem E ſumto in ipſa recta cadant in peripheriam deſcripti circuli quamplures rectæ EH, EG &c. Dico, has omnes eſſe inter ſe æquales.

Fig. 18. Tab. III.

Demonſtratio.

Cum enim recta EF ſit ex hypotheſi perpendicularis plano ABCD, perpendicularis itidem erit utrique rectæ FG, FH (a). Quamobrem anguli EFG, EFH erunt recti (b); adeoque inter ſe æquales (c). Æquales ſunt autem etiam rectæ FG, FH (d), & recta EF eſt utrique triangulo EFG, EFH communis. Ergo baſis quoque EG baſi EH æqualis erit (e). Igitur ſi in plano &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA X.

Si duo plana ſe mutuo ſecuerint, communis eorum ſectio eſt recta linea.

24 Duo plana ABCD, EFGH ſe mutuo ſecent, eorumque communis ſectio ſit KL. Dico, hujuſmodi ſectionem eſſe lineam rectam.

Euclid. lib. 11. p. 3.

Demon-

(a) § 2. (b) Lib. III. § 23. (c) Ibid. § 37. (d) Ibid. § 10. (e) Lib. V. § 73.

Demonſtratio.

Quod ſectio hujuſmodi ſit linea ex eo patet, quod plana ſe mutuo ſecantia, longitudine dumtaxat, & latitudine gaudeant. Non ſunt enim niſi ſuperficies. Quod vero linea ſectionis KL ſit recta, ſic oſtenditur. Certum ſiquidem eſt, punctum K commune eſſe utrique plano ABD, FEH, quemadmodum etiam punctum L. Rectæ ſiquidem lineæ quibus ipſa plana terminantur, nonniſi in punctis K, L ſeſe mutuo ſecare poſſunt. Certum eſt etiam, a quovis puncto ad quodvis punctum in utroque plano ſumto rectam lineam duci poſſe (a). Igitur ſi linea KL non eſt recta, hæc non impediet, quo minus in utroque plano duci poſſit recta a puncto K ad punctum L, quæ ſunt utrique plano communia; cum hujuſmodi plana nihil aliud commune habeant, niſi lineam ſectionis KL. Sit ergo in plano ABD linea recta K*b*L, & in plano FEH linea recta K*a*L. Duæ igitur rectæ K*b*L, K*a*L ſpatium concludunt. Habent enim extrema communia K, L. Repugnat autem duas rectas ſpatium concludere (b). Ergo neutra linearum K*b*L, K*a*L eſt recta; ac proinde duci neutiquam poteſt recta linea a puncto K ad punctum L, quin ſit communis utrique plano ABD, FEH. Nequit autem hujuſmodi recta eſſe communis utrique plano, niſi quatenus ſit communis illorum ſectio, ut patet. Ergo ſectio KL planorum ABD, FEH eſt linea recta; adeoque ſi duo plana &c. quod erat oſtendendum. Fig 19. Tab. III.

THEO-

(a) Lib. III. §. 29. (b) Lib. IV. §. 7.

THEOREMA XI.

Duo plana, quibus eadem recta linea ſimul ad perpendiculum inſiſtit, ſunt parallela.

Euclid. lib. 11. p. 14. 25 Duobus planis ABCD, EFGH ſimul ad perpendiculum inſiſtat eadem recta *af*. Dico, plana ABCD, EFGH eſſe inter ſe paralella.

Demonſtratio.

Per punctum *a* in plano ABCD ducatur recta *bd*, & per punctum *f* ducatur in plano EFGH recta *eg*; ſintque duæ *bd*, *eg* in eodem plano. Non enim repugnat, ut idem planum tranſeat per puncta *a*, *f*, & utrumque ſecet planum ABCD, EFGH, eorumque ſectiones ſint rectæ *bd*, *eg* (a). Fig. 17. Tab. III. Cum igitur recta *fa* ad perpendiculum inſiſtat plano ABCD, perpendicularis itidem erit rectæ *bd* (b); rectusque idcirco erit angulus *daf* (c). Eandem ob cauſam rectus erit etiam angulus *afg*. Sunt autem duo anguli *daf*, *afg* interni ad eaſdem partes, ut patet. Ergo duæ rectæ *bd*, *eg* erunt parallelæ (d). Eodem modo oſtendam, parallelas itidem eſſe duas rectas *mn*, *bk*, omneſque alias, quæ ab eodem plano per puncta *a*, *f* tranſeunte, duoque plana ABCD, EFGH ſecante, in ipſis planis deſignari poſſunt. Sunt autem omnes hujuſmodi rectæ parallelæ in ipſis planis ABCD, EFGH. Ergo hujuſmodi itidem plana ſunt inter ſe parallela. Duo igitur plana &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XII.

Si duo plana parallela eodem plano ſecta fuerint, eorum ſectiones erunt parallelæ.

26 Duo plana ABCD, EFGH parallela ſint inter ſe, eodemque

(a) §. 24. (b) §. 2. (c) Lib. III. §. 23. (d) Lib. IV. §. 9.

demque plano ſecentur, ſintque eorum ſectiones duæ rectæ *bd*, *eg*. Dico, rectas hujuſmodi *bd*, *eg* eſſe inter ſe parallelas. Euclid. lib. 11. p. 16.

Demonſtratio.

Si namque duæ *bd*, *eg* parallelæ non ſunt inter ſe, ſi ad eandem partem directe producantur, ſibi mutuo continuo accedent (a). Sunt autem hujuſmodi rectæ in planis ABCD, EFGH. Ergo, ſi plana ipſa ſimul cum illis rectis in directum producta fuerint, proximiora ſibi mutuo continuo fient; ac proinde non erunt inter ſe parallela (b). Hoc autem eſt contra hypotheſim. Ergo rectæ *bd*, *eg* ſunt parallelæ. Itaque ſi duo plana parallela &c. quod erat oſtendendum. Fig. 17. Tab. III.

THEOREMA XIII.

Si duo plana ſe invicem ſecantia eidem plano ad perpendiculum inſtiterint, communis quoque eorum ſectio eidem plano perpendicularis erit.

27 Duo plana ſe mutuo ſecantia ABCD, EFGH ad perpendiculum incumbant plano MN, ſitque communis eorum ſectio recta KL. Dico, rectam quoque KL plano MN ad perpendiculum incumbere. Euclid. lib. 11. p. 19.

Demonſtratio.

Si namque recta KL, quæ communis eſt utrique plano ABCD, EFGH, utpote communis eorum ſectio, plano MN ad perpendiculum non incumbit, perpendicularis non erit rectæ GL, neque rectæ LC, ſecundum quas plana ipſa ABCD, EFGH planum MN ſecant. Neque enim poteſt recta KL ad perpendiculum inſiſtere rectis GL, LC, quin perpendicularis itidem ſit ipſi plano MN (c), in quo rectæ GL, LC reperiuntur. Certum eſt autem, poſſe ex puncto L Fig. 19. Tab. III.

(a) Lib. IV. § 5. (b) §. 12. (c) §. 22.

erigi in plano ABCD rectam, quæ ſit ejus baſi LC perpendicularis, ſicuti alteram in plano EFGH ex eodem puncto L, quæ illius itidem baſi GL perpendiculariter incumbat. Sint ergo hujuſmodi rectæ perpendiculares L*n*, L*m*. Igitur duæ rectæ L*m*, L*n* educi poſſunt ex eodem puncto L, quæ ſint perpendiculares eidem plano MN. Non enim poteſt recta L*n* eſſe perpendicularis baſi LC plani ABCD, & recta L*m* perpendiculariter inſiſtere baſi GL plani EFGH, quin utraque L*n*, L*m* perpendicularis itidem ſit plano MN (a); cum ex hypotheſi utrumque planum ABCD, EFGH plano MN ad perpendiculum incumbat. Repugnat autem, duas L*m*, L*n* ſimul perpendiculares eſſe plano MN (b). Ergo non alia recta educta ex puncto L erit plano MN perpendicularis, niſi communis ſectio LK. Igitur ſi duo plana ſe invicem ſecantia &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIV.

Si duo plana parallela fuerint, recta linea uni eorum perpendicularis, alteri quoque perpendicularis erit.

28 Sint duo plana inter ſe parallela ABCD, EFGH. Uni autem eorum ABCD ad perpendiculum incumbat recta *af*. Dico, rectam *af* alteri quoque EFGH eſſe perpendicularem. Fig. 17. Tab. II.

Demonſtratio.

Per puncta *af* ducatur planum, eoque ſecentur duo ipſa plana ABCD, EFGH, ita ut ipſorum ſectiones ſint rectæ *mn*, *h*K. Quoniam igitur duo plana ABCD, EFGH poſita ſunt parallela, ſectiones quoque *mn*, *h*K erunt parallelæ (c). Eſt autem recta *af* perpendicularis rectæ *mn* (d), cum poſita ſit ad perpendiculum plano ABCD incumbere. Ergo rectæ quoque *h*K ipſa *af* perpendicularis erit (e). Eodem

(a) § 8. (b) §.14. (c) §.26. (d) §.2. (e) Lib. IV. §.16.

Eodem modo oſtendam, ipſam *af* perpendiculariter inſiſtere rectis omnibus, quæ in plano EFGH per punctum *f* duci poſſunt. Ergo recta *af* eſt plano EFGH perpendicularis (a). Itaque ſi duo plana &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XV.

Inclinatio duorum planorum eſt ubique eadem.

29 Planum FEG inſiſtat plano ABCD. Dico, eandem ubique eſſe inclinationem plani FEG ad planum ABCD.

Demonſtratio.

Communis ſectio illorum planorum ſit recta EG, in qua ſumtis punctis E, *b*, ducantur rectæ *ba*, EF in plano FEG, rectæ EG perpendiculares, & in plano ABCD rectæ *bd*, ED, perpendiculares quoque eidem EG. Tum fiant rectæ EF, *ba* æquales inter ſe, ſicuti etiam rectæ *bd*, ED, & ducantur rectæ *a*F, *d*D. Quoniam igitur rectæ FE, *ab* perpendiculares ſunt eidem EG, anguli interni FE*b*, E*ba* erunt recti (b), ac proinde parallelæ ipſæ rectæ EF, *ba* (c). Duæ autem EF, *ba* poſitæ ſunt æquales. Ergo duæ quoque E*b*, F*a* inter ſe æquales (d), & parallelæ erunt (e). Eodem modo oſtendam, duas quoque E*b*, D*d* æquales eſſe, & parallelas. Igitur duæ F*a*, D*d* æquales ſunt, & parallelæ eidem E*b*; ac proinde inter ſe quoque ſunt æquales, & parallelæ (f). Quamobrem ſi earum extrema jungantur rectis FD, *ad*, hæ ſimiliter erunt æquales (g). Conſtituta ergo habentur duo triangula FED, *abd*, quorum latera ſunt æqualia, alterum alteri, videlicet FE, *ab*, & ED, *bd*, ſicuti etiam baſes æquales FD, *ad*. Igitur Fig. 16. Tab. III.

(a) §. 2. (b) Lib. III. §. 23. (c) Lib. IV. §. 9. (d) Lib. V. §. 75. (e) Ibid. §. 18. (f) Lib IV. §. 17. (g) Lib V. §. 75.

anguli FED, *a b d* ſunt inter ſe æquales (a). Anguli autem FED, *abd* ii ſunt, ex quibus deſumitur inclinatio plani FEG ad planum ABCD (b). Ergo horum planorum inclinatio eſt ubique eadem. Itaque inclinatio &c. quod erat oſtendendum.

ELE-

(a) Lib.V.§.82. (b) §.10.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER IX.

De planorum ſimilitudine, & ratione.

HActenus ea planarum figurarum ſymptomata demonſtravimus, quæ illis *abſolute*, ſeu *ſecundum ſe ſpectatis* conveniunt: nunc ea conſideranda ſunt, quæ illis competunt, quatenus illarum una ad aliam refertur, ſive quatenus una ſimilis alteri eſt, certamque ad illam rationem habet.

DEFINITIO I.

1 F*iguræ rectilineæ ejuſdem generis dicuntur ſimiles, quæ ſunt inter ſe mutuo æquiangulæ, & habent latera circa æquales angulos proportionalia*. Sic duo triangula ABC, *abc* erunt Fig.20. ſimilia, ſi angulus ABC æqualis fuerit angulo *abc*, angu- Fig.21. Tab.III. lus BCA angulo *bca*, & angulus CAB angulo *cab*; & inſuper ſi fuerit latus AB ad latus BC, ut latus *ab* ad latus *bc*, latus BC ad latus CA, ut latus *bc* ad latus *ca*, & latus CA ad latus AB, ut latus *ca* ad latus *ab*.

COROLLARIUM I.

2 *Figuræ planæ rectilineæ ejuſdem generis inter ſe mutuo æquilateræ, & æquiangulæ ſunt ſibi mutuo ſimiles*. Ut ſi duo trian- Fig.20. gula A*bc*, *abc* fuerint inter ſe mutuo æquilatera, & æqui- Fig.21. Tab.III. angula, erunt ſibi mutuo ſimilia. Habent enim latera circa æquales angulos proportionalia. Quandoquidem ſi ponatur

A*b*

A*b* = *ab*, & *bc* = *bc*, erit quoque A*b* ad *bc*, ut *ab* ad *bc* (a). Idipſum de aliis dicito.

COROLLARIUM II.

3 *Omnes figuræ rectilineæ regulares ejuſdem generis ſunt ſibi mutuo ſimiles*. Sunt enim omnes inter ſe mutuo æquiangulæ (b). Cumque earum quælibet ſit æquilatera, duo quælibet latera unius eandem habent rationem inter ſe, quam duo quælibet latera alterius, nempe rationem æqualitatis; ac proinde ipſæ figuræ habent etiam latera circa æquales angulos proportionalia.

COROLLARIUM III.

4 *Quodlibet latus figuræ regularis eſt homologum cuilibet lateri alterius figuræ regularis ejuſdem generis*. Cum enim omnia latera figuræ regularis ſint æqualia (c), perinde omnino eſt, quodcumque latus unius figuræ ad quodcumque latus alterius figuræ itidem regularis ejuſdem generis referatur. Idem enim ad æqualia eandem rationem habet (d).

DEFINITIO II.

5 *Arcus ſimiles duorum circulorum dicuntur illi; qui eandem habent proportionem ad integram ſui circuli peripheriam*. Ut ſi
Fig. 22. arcus A*e*C circuli ABC fuerit ad totam peripheriam ABC,
Tab. III. ut eſt arcus D*o*F circuli DEF ad totam peripheriam DEF, duo arcus A*e*C, D*o*F circulorum ABC, DEF erunt ſibi mutuo ſimiles.

COROLLARIUM I.

6 *Æquales arcus ejuſdem circuli, vel circulorum æqualium ſunt ſibi mutuo ſimiles*. Eadem quippe eſt utriuſque ratio ad ſui circuli peripheriam (e).

COROL-

(a) Lib. I. §. 102. (b) Lib. VI. §. 45. (c) Lib. V. §. 20. (d) Lib. I. §. 112. (e) Lib. I. §. 102.

COROLLARIUM II.

Arcus ſimiles duorum circulorum ſunt directe inter ſe, ut integræ ipſorum circulorum peripheriæ.

7 Poſita nimirum ſimilitudine arcuum AeC, DoF, ratio arcus AeC ad arcum DoF diverſa ab ea non erit, quam habet peripheria ABC ad peripheriam DEF. Quandoquidem cum arcus AeC, DoF ſint partes ſimiles peripheriarum ABC, DEF (a) erit arcus AeC ad arcum DoF, ut tota peripheria ABC ad totam peripheriam DEF (b). Fig. 11. Tab. III.

DEFINITIO III.

8 *Duo circulorum ſectores vocantur ſimiles, quorum eadem eſt ratio ad ſuum circulum.* Sic duo ſectores AGC, DGF circulorum ABC, DEF erunt ſimiles, ſi ſector AGC fuerit ad circulum ABC, ut eſt ſector DGF ad circulum DEF. Fig. 11. Tab. III.

DEFINITIO IV.

9 *Segmenta duorum circulorum ſunt ſimilia, quæ eandem habent rationem ad ſuum integrum circulum.* Ut ſi ratio ſegmenti AeC ad ſuum circulum ABC diverſa non fuerit a ratione ſegmenti DoF ad circulum DEF, duo ipſa ſegmenta AeC, DoF erunt ſimilia. Fig. 11. Tab. III.

COROLLARIUM I.

10 *Segmenta æqualia, ſicuti etiam ſectores æquales ejuſdem circuli, vel circulorum æqualium, ſunt ſimilia.* Habent enim omnia eandem rationem ad ſuum circulum (c).

COROL-

(a) Lib. I. §. 37. (b) §. 126. (c) §. 102.

COROLLARIUM II.

Similia duorum circulorum ſegmenta, ſicuti etiam ſectores ſimiles ſunt inter ſe, ut ipſi integri circuli.

11 Sector nempe AGC circuli ABC eſt ad ſimilem ſectorem DGF circuli DEF, ut integer circulus ABC ad inte-
Fig. 22. Tab. III. grum circulum DEF. Cum enim ſectores AGC, DGF ſint partes ſimiles circulorum ABC, DEF (a) erit ſector AGC ad ſimilem ſectorem DGF, ut circulus ABC ad circulum DEF (b). Eodem modo ratiocinare de ſegmentis ſimilibus A*e*C, D*o*F.

DEFINITIO V.

12 *Duæ figuræ rectilineæ ſimiles dicuntur ſuper duas rectas lineas ſimiliter deſcriptæ, cum duæ illæ lineæ ſunt latera ipſarum figurarum homologa, & æquales anguli eodem ordine ſeſe conſequuntur:*
Fig. 20. Fig. 21. Tab. III. Ut ſi rectæ BC, *bc* fuerint latera homologa triangulorum ſimilium ABC, *abc*, & æquales ipſarum anguli ABC, *abc* * BCA, *bca* * CAB, *cab* eodem ordine ſeſe conſequantur, duo ipſa triangula ſimilia ABC, *abc* erunt ſimiliter deſcripta ſuper rectas BC, *bc*.

DEFINITIO VI.

13 *Duo parallelogramma, ſicuti etiam duo triangula plana rectilinea dicuntur reciprocare ſibi mutuo baſes, & altitudines, cum unius baſis eſt ad baſim alterius, ut reciproce altitudo poſterioris*
Fig. 1. Fig. 2. Tab. IV. *ad altitudinem prioris*. Ut ſi baſis BC trianguli ABC fuerit ad baſim *bc* trianguli *abc*, quemadmodum altitudo *ae* hujus ad illius altitudinem AE, duo triangula ABC, *abc* dicentur reciprocare ſibi mutuo baſes, & altitudines. Idipſum dicito de duobus parallelogrammis ADBC, *adbc*.

DEFI-

(a) Lib. I. §. 37. (b) §. 126.

DEFINITIO VII.

14 *Figura rectilinea dicitur circulo* inſcripta, *& viciſſim circulus figuræ rectilineæ* circumſcriptus *vocatur, cum circuli peripheria tranſit per apices omnium angulorum ipſius figuræ*. Sic hexagonum DHM circulo BH *inſcriptum* eſt, & viciſſim circulus BH eſt hexagono *circumſcriptus*; quia apices omnium angulorum ipſius figuræ in circuli peripheria reperiuntur. Fig. 7. Tab. III.

DEFINITIO VIII.

15 *Figura rectilinea dicitur circulo* circumſcripta, *& viciſſim circulus figuræ rectilineæ* inſcriptus, *cum ſingula ipſius figuræ latera circuli peripheriam tangunt*. Sic quadratum ABDC *circumſcriptum* eſt circulo *efgb*, & viciſſim circulus *efgb* eſt quadrato ABDC *inſcriptus*; quia nimirum ſingula ipſius quadrati latera ab inſcripti circuli peripheria tanguntur. Fig. 21. Tab. III.

DEFINITIO IX.

16 *Centrum figuræ rectilineæ regularis eſt punctum in illius area, quod eſt centrum circuli ipſi figuræ inſcripti, vel circumſcripti*. Sic punctum A eſt centrum hexagoni regularis DHM; quia eſt centrum circumſcripti circuli BFL. Punctum quoque *a* eſt centrum quadrati ABDC; quia eſt centrum inſcripti circuli *efgb*. Ceterum cuilibet figuræ rectilineæ regulari circulum inſcribi, & circumſcribi poſſe, praxis ipſa oſtendit, ſuoque loco, cum ſcilicet de *figurarum inſcriptione, & circumſcriptione* agemus, perſpicuum fiet. Fig. 7. Fig. 21. Tab. III.

DEFINITIO X.

17 *Radius figuræ rectilineæ regularis eſt recta quæcumque linea ducta ab illius centro ad apicem cujuslibet anguli ipſius figuræ*. Ut ſi punctum A fuerit centrum hexagoni regularis DHM, rectæ AD, AF &c. erunt illius radii. Fig. 7. Tab. III.

COROLLARIUM I.

18 *Radius figuræ rectilineæ regularis circulo inſcriptæ non differt a radio ipſius circuli*. Idem eſt enim utriuſque centrum (a), & circuli peripheria per omnium angulorum apices tranſit (b).

COROLLARIUM II.

19 *Omnes radii figuræ rectilineæ regularis circulo inſcriptæ ſunt æquales*. Cum enim a radiis circuli non ſint diverſi (c), erunt omnes, quemadmodum illi (d), inter ſe æquales.

COROLLARIUM III.

20 *Radius figuræ rectilineæ regularis circulo circumſcriptæ eſt* Fig. 21. Tab. III. *major ſemidiametro ipſius circuli*. Sic radius *a*B quadrati ABDC eſt major ſemidiametro *ag* inſcripti circuli *e f g h*. Excurrit enim, ut patet, extra peripheriam ipſius circuli.

DEFINITIO XI.

21 *Catetus, ſive radius rectus figuræ rectilineæ regularis eſt recta ducta ab illius centro in ejuſdem latus, eique ad perpendiculum* Fig. 7. Tab. III. *incumbens*. Ut ſi a centro A hexagoni regularis DHM cadat in latus HL recta perpendicularis AG, hæc erit *catetus*, ſive *radius rectus* ipſius hexagoni DHM.

COROLLARIUM I.

22 *Catetus figuræ rectilineæ regularis eſt minor ejuſdem radio*. Fig. 7. Tab. III. Nimirum *catetus* AG hexagoni regularis DHM eſt minor radio AH. Recta enim AG, utpote perpendicularis, minima eſt omnium rectarum, quæ a centro A in latus HL cadere poſſunt (e).

COROL-

(a) §.16. (b) §.14. (c) §.18. (d) Lib. VII. §.10. (e) Lib. V. §.57.

Digitized by Google

COROLLARIUM II.

23 *Catetus figuræ rectilineæ regularis circulo inſcriptæ eſt minor ſemidiametro ipſius circuli*. Semidiameter namque circumſcripti circuli diverſa non eſt ab ipſius figuræ radio (a).

COROLLARIUM III.

24 *Cateti figuræ rectilineæ regularis diverſi non ſunt ab altitudine iſoſcelium triangulorum, in quæ figura ipſa reſolvi poteſt*. Ut ſi hexagonum regulare DHM reſolvatur in ſex triangula iſoſcelia ope radiorum AB, AD, AF, AG, AL, AM, altitudo AG trianguli HAL erit ipſius hexagoni *catetus*. Eſt enim AG recta ducta a vertice A ipſius trianguli ad illius baſim HL, eique ad perpendiculum incumbens (b). Fig. 7. Tab. III.

COROLLARIUM IV.

25 *Catetus figuræ rectilineæ regularis circulo circumſcriptæ eſt radius inſcripti circuli*. Nimirum recta *ag* ducta a centro *a* quadrati ABDC ad punctum *g*, in quo inſcripti circuli *efgh* peripheria tangit latus ipſius quadrati, quæque eſt radius circuli *efgh*, eſt etiam *catetus* quadrati ABCD. Hæc enim ad perpendiculum inſiſtit lateri BD ipſius quadrati (c), prout ad *catetum* requiritur. Fig. 21. Tab. III.

COROLLARIUM V.

26 *Catetus figuræ rectilineæ regularis circulo circumſcriptæ eſt minor cateto alterius cujusvis figuræ rectilineæ itidem regularis eidem circulo inſcriptæ*. *Catetus* namque figuræ circulo circumſcriptæ radium ipſius circuli adæquat (d), a quo tamen deficit *catetus* figuræ circulo inſcriptæ (e).

(a) §.18.
(b) §.21.
(c) Lib. VII. §.53.
(d) §.25.
(e) §.23.

COROLLARIUM VI.

27 *Cateti figuræ rectilineæ regularis ſunt omnes inter ſe æquales*. Sunt enim radii inſcripti circuli (a).

COROLLARIUM VII.

28 *Altitudines iſoſcelium triangulorum, in quæ polygonum regulare reſolvi poteſt, ſunt omnes inter ſe æquales*. Cum enim horum triangulorum altitudines a *catetis* ipſius polygoni non differant (b), ſicuti omnes *cateti* æquales ſunt inter ſe (c), ita ipſorum triangulorum altitudines ſunt inter ſe æquales.

DEFINITIO XII.

29 *Circuli concentrici dicuntur illi, qui circa idem punctum ſunt deſcripti, ſeu quibus idem eſt centrum*. Contra vero *illi excentrici vocantur, quorum centrum eſt diverſum*. Nimirum *concen-*
Fig. 1. *trici* ſunt circuli ABC, EGF, quia idem eſt utriuſque cen-
Tab.IV. trum D. At vero *excentrici* ſunt circuli ABC, DE; quia centrum prioris eſt G, poſterioris eſt F, quæ ſunt diverſa.

DEFINITIO XIII.

30 *Circuli in eodem plano deſcripti dicuntur inter ſe mutuo paralleli, cum illorum peripheriæ æqualiter ubique a ſe mutuo diſtant.*
Fig. 1. Ut ſi peripheria circuli ABC æqualiter ubique diſtet a peri-
Fig. 4. Tab.IV. pheria circuli EGF, duo circuli in eodem plano deſcripti ABC, EGF erunt ſibi mutuo paralleli.

SCHOLION.

31 Diſtantia a ſe mutuo peripheriarum ABC, EGF duo-
Fig. 1. rum circulorum ABC, EGF in eodem plano deſcriptorum
Tab.IV. attenditur penes ſegmenta AE, CF radiorum AD, CD ma-
joris

(a) §.25. (b) §.24. (c) §.27.

Digitized by Google

joris circuli ABC. Radii namque AD, CD ſpectari poſſunt veluti rectæ ad perpendiculum inſiſtentes peripheriæ ABC, ob æqualitatem ſcilicet angulorum, quos ipſi radii cum peripheria ſui circuli conſtituunt (a). *Illi ergo circuli cenſendi ſunt ſibi mutuo paralleli, quorum peripheriæ æqualia ſegmenta radiorum majoris circuli intercipiunt.*

COROLLARIUM.

32 *Omnes circuli concentrici ſunt ſibi mutuo paralleli*. Videlicet paralleli ſunt ſibi mutuo duo circuli concentrici ABC, EGF. Ductis enim a communi centro D ad majoris peripheriam ABC radiis DA, DC, cum iſti ſint æquales inter ſe, quemadmodum etiam radii DE, DF (b), ſublatis æqualibus DE, DF, reſidua ſegmenta EA, FC erunt æqualia (c). Ergo eadem ubique eſt diſtantia a ſe mutuo duarum peripheriarum ABC, EGF (d); ac proinde circuli ABC, EGF erunt paralleli (e). Fig. 1. Tab. IV.

AXIOMA I.

Figuræ rectilineæ ejuſdem generis, quæ eidem ſunt æquilateræ, vel æquiangulæ, inter ſe quoque ſunt æquilateræ, vel æquiangulæ.

33 Quæ namque eidem ſunt æqualia, inter ſe quoque ſunt æqualia (f).

AXIOMA II.

Si una duarum figurarum, quæ ſint inter ſe æquilateræ, vel æquiangulæ, fuerit alteri æquilatera, vel æquiangula, altera quoque earundem erit eidem æquilatera, vel æquiangula.

34 Quandoquidem ſi unum duorum æqualium alteri æqua-

(a) Lib. VII §. 12. (b) Ibid. §. 10. (c) Syn. Alg. §. 266. (d) §. 31. (e) §. 30. (f) Syn. Alg. §. 259.

æquale eſt ; alterum quoque eorundem eſt eidem tertio æquale (a).

AXIOMA III.

Figuræ, quæ eidem ſunt ſimiles, ſibi quoque mutuo ſunt ſimiles.

35 Ut ſi duo triangula plana rectilinea ABC, *abc* ſimilia fuerint eidem triangulo X, ſibi quoque mutuo erunt ſimilia. Enimvero ſi duo triangula ABC, *abc* æquiangula ſunt triangulo X, inter ſe quoque mutuo erunt æquiangu-
Fig. 20. la (b). Et ſi latera tam duorum ABC, X, quam duo-
Fig. 21. Tab. III. rum *abc*, X, quæ ſunt circa æquales angulos, habent eandem rationem inter ſe, ipſa eadem latera duorum ABC, *abc* eandem inter ſe rationem habebunt; cum rationes, quæ eidem ſunt æquales, inter ſe quoque ſint æquales (c). Ergo duo triangula ABC, *abc* erunt ſibi mutuo æquiangula, & æquilatera; ac proinde ſibi mutuo ſimilia.

Methodus indiviſibilium explicata.

Methodus *indiviſibilium*, quam primus omnium excogitavit, adhibuitque vir Cl. P. Bonaventura Cavalerius Mediolanenſis ex Ordine Jeſuatorum, dicitur illa, qua, reſolutis in ſua quaſi elementa figuris omnibus tam planis, quam ſolidis, abſtruſiora illarum ſymptomata mira facilitate demonſtrantur.

I.

36 Aſſumitur primo, lineas omnes conſtare ex punctis. Nomine *puncti* non intelligitur id, quod reipſa omni penitus caret extenſione, partibusque tam realiter ſeparabilibus, quam mente tantum deſignabilibus omnino deſtitutum eſt, ſed

(a) Syn. Alg. §. 262. (b) §. 33. (c) Lib. I. §. 78.

Digitized by Google

ſed magnitudo ſecundum omnem dimenſionem infinite parva, minor nempe quacumque aſſignabili quantitate, atque adeo talis, ut nulla pars in ea diſcernatur, perinde ac ſi reipſa nullam omnino partem haberet.

Geneſis linearum.

37 Ex hiſce itaque punctis, quæ *minima phyſica* vocari etiam poſſunt, ponitur linea quæcunque primo conſurgere. Profecto ſi unum ex hujuſmodi punctis moveri intelligatur, lineam deſignare ſuo fluxu concipietur, *rectam* quidem, ſi moveatur fluxu recto; *curvam* vero, ſi flexo tramite ſpatium excurrat. Veſtigium namque illud longitudinem dumtaxat habebit, quemadmodum fluens punctum ita ſpectatur, & ſumitur, non ſecus ac ſi omni plane extenſione reipſa deſtitutum eſſet. Sicuti ergo fluxus puncti eſt quædam veluti ipſius in ſpatio replicatio, ita linea, quam hujuſmodi fluxus deſignat, non aliud erit, niſi aggregatum ex pluribus punctis in longum unitis.

COROLLARIUM.

38 *Elementa linearum ſunt puncta.* Elementa enim cujuſvis rei ſunt illa, ex quibus res ipſa componitur.

II.

39 Quemadmodum porro linea ex punctis, ita ſuperficies ex lineis, eodem plane modo, quo tela ex filis, ſecundum longitudinem ſimul unitis, conſtare dicitur. In geneſi namque ſuperficierum concipitur linea ita moveri, ut Fig. 14. Tab. III. veſtigium longum dumtaxat, & latum poſt ſe relinquat, videlicet ſuperficies plana ABDC ponitur fieri ex tali motu lineæ AB, ut ſibi ſemper parallela exiſtat, prout exhibent rectæ *ab*, *cd*, *ef*, CD, quæ conſiderari poſſunt, veluti veſtigia relicta a linea fluente AB. Sicuti ergo fluxus puncti eſt quædam veluti ipſius puncti in ſpatio replica-

plicatio, ita fluxus lineæ eſt quædam veluti replicatio ipſius lineæ in eodem ſpatio; cumque hinc conſurgat ſuperficies, quemadmodum ex fluxu puncti naſcitur linea, ſpectari poteſt ſuperficies veluti aggregatum ex pluribus lineis ſecundum longitudinem ſimul unitis.

COROLLARIUM.

40 Hinc *elementa ſuperficierum ſunt lineæ*.

Geneſis parallelogrammi.

41 Oritur parallelogrammum quodcunque ex parallela elevatione rectæ lineæ ejuſdem quantitatis continuo permanentis, ita tamen ut ſemper in eodem plano conſiſtat. Fig. 14. Tab. III. Sic parallelogrammum ABDC emergit ex tali motu rectæ AB in eodem plano, ut ſibi ſemper ſit parallela, ejuſdemque perpetuo magnitudinis. Conſtat enim, rectas AC, BD, quæ fiunt ab extremis punctis A, B rectæ generatricis AB, parallelas eſſe inter ſe; cum æqualiter hoc ipſo inter ſe mutuo ubique diſtent. Conſtat etiam, rectas quaſcunque *ab*, *cd*, *ef*, CD parallelas baſi AB, ſibique mutuo, eſſe inter ſe æquales (a). Hanc porro rectæ lineæ parallelam elevationem in geneſi parallelogrammi metitur ipſius parallelogrammi altitudo. Ut ſi recta CA fuerit altitudo parallelogrammi ABDC, hæc erit menſura illius motus rectæ generatricis AB, ex quo parallelogrammum ipſum conſurgit. Sola enim altitudo CA poteſt eſſe talis motus menſura, utpote omnium rectarum, quæ hujuſmodi motum metiri poſſunt, minima (b).

COROLLARIUM I.

42 *Elementa parallelogrammi ſunt omnia inter ſe æqualia.* Sunt enim rectæ determinatæ ex fluxu rectæ generatricis, quæ in ſuo motu ejuſdem ſemper quantitatis perſeverat.

COROL-

(a) Lib. VI. §. 23. (b) Lib. V. §. 57.

COROLLARIUM II.

43 *Hinc omne parallelogrammum ex tot rectis lineis æqualibus inter ſe, atque ipſius baſi, ſibique mutuo parallelis componitur, quot ſunt puncta in illius altitudine.* Nimirum parallelogrammum CABD conſurgit ex tot rectis æqualibus tum inter ſe, tum illius baſi AB, atque inter ſe parallelis, quot puncta in illius altitudine CA numerantur. In parallela ſiquidem elevatione rectæ generatricis, ſive baſis AB, toties replicatur ipſa recta AB, quot ſunt puncta in altitudine CA, quæ motum ipſius rectæ metitur. Fig. 24. Tab. III.

COROLLARIUM III.

44 *Spectari idcirco poteſt parallelogrammum veluti factum ex ductu baſis in altitudinem.* Dum enim recta AB percurrit altitudinem CA, fitque parallelogrammum CABD, toties ſumitur ipſa AB, quot ſunt minima in altitudine CA. Sumere autem rectam AB, quot ſunt minima in altitudine CA, perinde eſt omnino, ac rectam AB per rectam CA multiplicare. Ergo &c. Fig. 24. Tab. III.

HYPOTHESIS.

45 Si ergo baſis parallelogrammi fuerit $= a$; ejuſque altitudo $= b$, parallelogrammum optime deſignabitur per ab. Eſt enim ab factum ex ductu quantitatis a in quantitatem b.

Geneſis circuli.

46 Oritur circulus ex completa rotatione rectæ lineæ in eodem plano ſemper exiſtentis circa unum ſui extremum penitus immobile. Ut ſi recta AB ita agatur in orbem circa immobile punctum A, ut in eodem plano Fig. 5. Tab. IV.

ſemper exiſtat; atque illuc redeat, unde moveri cœpit, fiet circulus DBC. Conſtat enim, hujuſmodi rectam circulare veſtigium motu ſuo relinquere.

COROLLARIUM I.

47 *Producitur propterea circulus a rotante ipſius radio circa centrum immobile*. Ex quo ad evidentiam evincitur, *omnes ejuſdem circuli radios eſſe inter ſe æquales*.

COROLLARIUM II.

48 *Area circuli componitur ex tot curvis circularibus lineis ſibi mutuo concentricis, quot ſunt puncta in illius radio, centro excepto*. Ut ſi radius AB quatuor tantum contineat
Fig. 6. Tab IV. puncta A, *a*, *b*, B, area circuli erit compoſita ex tribus curvis circularibus *amn*, *bcd*, BCD. Quodlibet enim punctum rotantis radii AB curvam circularem motu ſuo deſcribit, quæ omnes ſimul ſumtæ aream ipſius circuli explent.

COROLLARIUM III.

49 *Area quoque ſectoris circuli ex tot arcubus concentricis conſurgit, quot, centro excepto, in illius radio puncta numerantur*.
Fig. 7. Tab. IV. Sic ſector ABC compoſitus erit ex quatuor arcubus concentricis BC, *de*, *cr*, *ab*; cum tot ſint puncta radii AB, quæ in illius geneſi circa centrum A in gyrum aguntur.

COROLLARIUM IV.

50 *Circuli radiorum, atque adeo etiam diametrorum, æqualium ſunt æquales*; & viciſſim *æquales circuli habent radios, ac proinde etiam diametros, inter ſe æquales*. Similiter *circulus majoris radii, adeoque etiam majoris diametri, major eſt*; & viciſſim *circulus, qui major altero eſt, tum radium, tum diametrum majorem habet*.

III.

III.

51 Solidum componitur ex planis, vel curvis ſuperficiebus, pro diverſa nimirum ipſorum indole, ſibi mutuo parallelis. Oritur enim ſolidum vel ex parallela elevatione plani, vel ex plano circa rectam immobilem rotante, ut ſuo loco explicabitur; ac proinde ſicuti ex motu puncti fit linea, ex motu lineæ ſuperficies, ita ex motu ſuperficiei ſolidum efficitur. Verum de ſolidorum geneſi plura ſuo loco dicemus. Id enim in præſens ſummis tantummodo labiis attigiſſe ſufficiat.

COROLLARIUM.

52 *Hinc elementa ſolidorum ſunt ſuperficies.*

Axioma fundamentale.

Illæ magnitudines ſunt æquales inter ſe, quarum elementa ſunt numero, & quantitate inter ſe æqualia.

53 Magnitudines namque illæ, quarum elementa ſunt numero, & quantitate inter ſe æqualia, ita ſe habent, ut earum una, ſalva quantitate, alteri ſubſtitui poſſit.

LEMMA I.

Rectæ parallelæ, quæ rectam incidentem in partes æquales dividunt, intervalla habent æqualia.

54 Dupliciter poteſt recta linea in plures rectas parallelas incidere, *ad perpendiculum* ſcilicet, & *oblique*.

Caſus primus.

Primo itaque recta RT ad perpendiculum incidat in re-

Fig. 13. Tab. X. ctas parallelas AB , CD , EF , a quibus in partes æquales RQ , QT dividatur , Dico , rectas AB , CD , EF æqualia intervalla habere.

Demonſtratio:

Stante namque hypotheſi, partes RQ, QT ſunt perpendicula , quæ diſtantiam determinant a ſe mutuo rectarum AB, CD, EF. Hujuſmodi autem partes RQ , QT ſunt æquales inter ſe . Ergo illarum rectarum intervalla ſunt æqualia (a).

Caſus ſecundus:

Fig. 11. Tab. X. Modo recta GM oblique incidat in rectas parallelas AB, CD, EF, ejuſque partes inter illas comprehenſæ, nimirum GK, KM, ſint æquales . Dico, rectas AB, CD, EF æqualia a ſe mutuo intervalla habere.

Demonſtratio:

Ducantur ex punctis G, K perpendicula GH, KL. Cum igitur anguli alterni GHK , HKL producti a recta HK in ipſa perpendicula incidente, ſint recti (b), ac proinde æquales (c), perpendicula GH , KL erunt parallela (d). Recta autem GM in illa incidit . Ergo anguli HGK, LKM erunt æquales (e). Eadem ratione æquales erunt anguli GKH, KML ; cum rectæ CD , EF poſitæ ſint parallelæ . Æqualia autem ſunt ex hypotheſi latera GK, KM triangulorum GHK, KLM, quibus æquales anguli , alter alteri , adjacent . Ergo latera , ſive perpendicula GH , KL ſunt æqualia (f) ; atque adeo rectæ parallelæ AB, CD, EF intervalla habent æqualia (g). Itaque rectæ parallelæ &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) Lib.VI. §.12. (b) Lib.III. §.23. (c) Ibid. §.37. (d) Lib.IV. §.12. (e) Ibid. §.14. (f) Lib.V. §.93. (g) Lib.VI. §.12.

THEOREMA I.

Si in triangulo plano rectilineo ducatur recta baſi parallela ſecans utrumque trianguli latus, proportionaliter latera ipſa ſecabit: ſegmenta unius erunt in eadem proportione ad ſegmenta alterius: utrumque latus eandem ad ſua reſpective ſegmenta rationem habebit: ſegmenta laterum erunt, ut ipſa latera: baſis erit ad ſecantem, ut latus ad ſegmentum; & ut latus ad baſim, ita erit ſegmentum ad rectam ſecantem.

In triangulo plano rectilineo ABC ducatur recta DE, quæ ſecans utrumque trianguli latus AB, AC, ſit baſi BC parallela. Fig. 1. Tab. IV.

I.

55 Dico primo, rectam DE proportionaliter ſecare latera AB, AC, videlicet eſſe AE ad EC, ut eſt AD ad DB. Euclid. lib. 6. p. 2.

Demonſtratio.

Ponatur latus AB diviſum in quinque partes æquales; & quidem ea lege, ut tres ex illis partibus, videlicet A*a*, *ab*, *b*D, ſint in ſegmento AD, & duæ D*c*, *c*B in ſegmento DB. Per ſingula autem diviſionis puncta, ſicuti etiam per verticem A ipſius trianguli ducantur rectæ A*v*, *ad*, *be*, *cf*, quæ baſi BC, adeoque etiam inter ſe (a), necnon rectæ ſecanti DE ſint parallelæ (b). Quoniam igitur partes A*a*, *ab*, *b*D, D*c*, *c*B poſitæ ſunt æquales, rectæ parallelæ A*v*, *ad* &c. æqualia intervalla habebunt (c). Quamobrem latus AC diviſum ab illis erit in quinque partes æquales A*d*, *de*, *e*E, E*f*, *f*C (d), ex quibus tres erunt in ſegmento AE, & duæ in ſegmento EC, quemadmodum tres ex totidem æqualibus in ſegmento AD, & duæ in ſegmento DB reperiuntur. Ergo

(a) Lib. IV. § 17. (b) Lib. IV. §. 18. (c) §. 54. (d) Lib. VI. §. 25.

Ergo erit AE ad EC, ut eſt AD ad DB (a), in ratione nimirum *ſeſquialtera* (b).

II.

56 Dico ſecundo; ſegmenta unius lateris eſſe in eadem ratione ad ſegmenta alterius, eſſe nimirum DB ad EC, ut eſt AD ad AE.

Demonſtratio.

Cum enim ſit AE . EC = AD . DB (c), erit quoque DB . AD = EC . AE (d). Igitur habebitur etiam DB . EC = AD . AE (e).

III.

57 Dico tertio; utrumque latus eandem ad ſua reſpective ſegmenta rationem habere, nimirum eſſe AC . AE = AB . AD, quemadmodum etiam AC . EC = AB . DB.

Demonſtratio.

Quandoquidem cum ſit AE . EC = AD . DB (f), erit quoque *componendo* AC . AE = AB . AD (g), necnon AC . EC = AB . DB (h).

IV.

58 Dico quarto, ſegmenta eſſe, ut ipſa latera, videlicet eſſe AD . AE = AB . AC, ſicuti etiam DB . EC = AB . AC.

Demonſtratio.

Cum enim ſit AC . AE = AB . AD, & AC . EC = AB .
DB

(a) Lib.I. §.31.
(b) Ibid. §.22.
(c) §.55.
(d) Lib I. §.121.
(e) Ibid. §.125.
(f) §.55.
(g) Lib.I §.138.
(h) Ibid. §.132.

DB (a), erit etiam *invertendo* AD . AB = AE . AC, & DB . AB = EC . AC (b). Ergo *alternando* erit AD . AE = AB . AC, & DB . EC = AB . AC (c).

V.

59 Dico quinto, baſim BC trianguli ABC eſſe ad rectam ſecantem DE, ut eſt latus AB ad ſegmentum AD, adeoque etiam latus AC ad ſegmentum AE. Fig. 9. Tab. IV.

Demonſtratio.

Poſita namque diviſione lateris AB, ut ſupra, nimirum in quinque æquales partes, ex quibus tres ſint in ſegmento AD, & duæ in ſegmento reſiduo DB, ducantur rectæ *ag*, *bf*, D*e*, *cd*, B*p* parallelæ lateri AC, adeoque etiam inter ſe (d). Diviſa igitur erit baſis BC in tot partes, in quot diviſum eſt latus AB, atque hujuſmodi partes, videlicet B*d*, *de*, *ef*, *fg*, *g*C æquales erunt inter ſe (e); cum ob æqualitatem partium A*a*, *ab*, *b*D, D*c*, *c*B rectæ parallelæ AC, *ag*, *bf*, D*e*, *cd*, B*p* æqualia intervalla habeant (f). Diviſa ſimiliter erit recta ſecans DE in tot partes, in quot diviſum eſt ſegmentum AD; cumque rectæ DE, BC poſitæ ſint parallelæ, partes ſecantis DE non tantum inter ſe, verum etiam partibus B*d*, *de*, *ef*, *fg*, *g*C æquales erunt (g). Baſis igitur BC erit ad rectam ſecantem DE, ut eſt latus AB ad ſegmentum AD (h); ac proinde etiam ut latus AC ad ſegmentum AE (i); cum jam ſit AC ad AE, ut AB ad AD (*k*). Igitur &c.

VI.

60 Dico ſexto, ſegmentum AD lateris AB eſſe ad rectam ſecantem DE, ut eſt latus AB ad baſim BC.

Demon-

(a) §. 57. (b) Lib I §. 121. (c) Ibid. §. 125. (d) Lib. IV. §. 17. (e) Lib. VI. §. 25. (f) §. 54. (g) Lib. VI. §. 26. (h) §. 57. (i) Lib. I. §. 78. (k) §. 57.

Demonſtratio.

Quandoquidem cum oſtenſum fuerit, eſſe AB : AD = BC . DE (a), erit quoque *alternando* AD . DE = AB. BC (b). Eodem modo demonſtrabitur, eſſe AE . ED = AC . CB . Itaque ſi in triangulo plano &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

61 Operationes omnes, quæ fiunt ope *circini proportionis*, §.59. potiſſimum innituntur.

COROLLARIUM.

Si duo circuli intus ſeſe tangant, & a puncto contactus duæ rectæ ducantur, quarum altera per centrum majoris tranſeat, altera vero extra centrum cadat, ſed minoris peripheriam dividat, erunt diametri ſubtenſis proportionales, atque inſuper ipſæ rectæ proportionaliter ſectæ erunt a peripheria minoris circuli.

62 Duo nimirum circuli ABC, ADE intus ſeſe tangant in puncto A, a quo per centrum F majoris circuli ad illius peripheriam ducatur recta, ſive diameter AC, extra centrum vero recta AB ſecans minoris peripheriam in puncto D: Erit AC. AB = AE. AD, necnon AE. EC = AD. DB.
Fig. 10. Tab IV. Cum enim recta AC per centrum G minoris circuli itidem tranſeat (c), ductis rectis BC, DE, anguli ADE, ABC erunt recti, utpote in ſemicirculo conſiſtentes (d); adeoque æquales inter ſe (e). Quamobrem duæ rectæ lineæ DE, BC erunt ſibi mutuo parallelæ (f). Igitur erit AC. AB = AE. AD (g), ſicuti etiam AE. EC = AD. DB (h).

THEO-

(a) §.59. (c) Lib.VII. §.57. (e) Lib.III. §.37. (g) §.57.
(b) Lib.I. §.125. (d) Ibid. §.75. (f) Lib IV. §.11. (h) §.55.

THEOREMA II.

In omni triangulo plano rectilineo recta ſecans proportionaliter duo ipſius latera eſt ejuſdem baſi parallela.

63 In triangulo plano rectilineo ABC recta DE proportionaliter dividat duo ipſius latera AB, AC, ita nimirum ut ſit AE ad EC, ut eſt AD ad DB. Dico, rectam ſecantem DE eſſe parallelam baſi BC. Euclid. lib. 6. p. 2.

Demonſtratio.

Si namque recta DE parallela non eſt baſi BC, ducatur per idem punctum D recta DF baſi parallela. Igitur erit Fig. 11 AF . FC = AD . DB (a). Eſt autem per hypotheſim AE. Tab. IV EC = AD. DB. Ergo erit quoque AF. FC = AE. EC(b), & *componendo* erit AC. FC = AC. EC (c). Duæ autem magnitudines FC, EC inæquales ſunt inter ſe, nempe FC major, & EC minor (d). Ergo eadem magnitudo AC eandem ad inæquales magnitudines rationem habet. Id autem plane falſum eſt (e). Ergo recta DF non eſt baſi BC parallela. Eodem modo oſtendam, nullam aliam rectam diverſam a recta DE duci poſſe per punctum D parallelam baſi BC. Igitur recta DE eſt baſi BC parallela; ac proinde in omni triangulo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Recta ſecans duo trianguli latera, ita ut eandem ambo ad ſuum ſegmentum rationem habeant, eſt baſi ipſius trianguli parallela.

64 Recta nimirum DE in triangulo ABC parallela erit Fig. 11. baſi BC, ſi fuerit AB. AD = AC. AE. Si namque fuerit Tab. IV.

Y AB.

(a) §. 55.
(b) Lib I. §. 76.
(c) Ibid. §. 232.
(d) Syn. Alg. §. 257.
(e) Lib. I. §. 229.

AB . AD = AC . AE, erit AB—AD . AD = AC—AE . AE, ſive BD . DA = CE . EA (a), & *invertendo* AD . DB = AE . EC (b). Ergo recta DE erit baſi BC parallela (c).

THEOREMA III.

In omni triangulo plano rectilineo recta baſi parallela aufert triangulum ſimile toti triangulo.

65 In triangulo plano rectilineo ABC ducatur recta DE
Fig. 12. Tab. IV. parallela baſi BC. Dico, triangulum ADE ſimile eſſe toti triangulo ABC.

Demonſtratio.

Cum enim recta DE ſit parallela baſi BC, angulus ADE æqualis erit angulo ABC, & angulus AED angulo ACB (d). Angulus autem BAC eſt communis utrique triangulo. Ergo duo triangula ABC, ADE ſunt inter ſe mutuo æquiangula (e). Habent autem etiam latera circa æquales angulos proportionalia; cum ob parallelismum rectarum DE, BC ſit AD . DE = AB . BC, DE . EA = BC . CA (f), necnon EA . AD = CA . AB (g). Ergo duo triangula ADE, ABC ſunt ſimilia (h); rectaque proinde DE triangulum aufert ſimile triangulo ABC. Itaque recta &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA IV.

Triangula ſibi mutuo æquiangula ſunt ſimilia, habentque latera æqualibus angulis oppoſita homologa.

Fig. 20. Fig. 21. Tab. III. Duo triangula plana rectilinea ABC, *abc* ſint ſibi mutuo æquiangula, eſto nimirum angulus ABC æqualis angulo

(a) Lib. I. §. 115. (b) Ibid. §. 121. (c) §. 63. (d) Lib. IV. §. 14. (e) Lib. V. §. 19. (f) §. 60. (g) §. 58. (h) §. 1.

gulo *abc*, angulus BCA angulo *bca*, & angulus CAB angulo *cab*.

I.

66 Dico primo, duo ipſa triangula ABC, *abc* eſſe ſimilia. Euclid. lib. 6. p. 4.

Demonſtratio.

Quoniam angulus *bac* trianguli *abc* æqualis eſt angulo BAC trianguli ABC, ſi unus alteri ſuperponatur, ſibi mutuo congruent (a), cadetque propterea latus *ab* ſuper latus AB, & latus *ac* ſuper latus AC, & baſis *bc* ſecabit latera AB, AC, prout exhibet *fig.* 20. Anguli autem *abc*, ABC poſiti ſunt æquales. Ergo recta *bc* in triangulo ABC, baſis nempe trianguli *abc* poſiti ſuper triangulum ABC, parallela erit baſi BC trianguli ABC (b). Igitur triangulum *abc* ſimile eſt triangulo ABC (c).

II.

67 Dico ſecundo, ſimilium triangulorum ABC, *abc* latera AB, *ab*, ſicuti etiam BC, *bc*, necnon AC, *ac*, quæ æqualibus, ut patet, angulis opponuntur, eſſe homologa. Euclid. ibid.

Demonſtratio.

Quandoquidem cum ob ſimilitudinem triangulorum ABC, *abc*, habeatur AB. BC = *ab*. *bc*, & CA. AB = *ca*. *ab* (d), homologi erunt tam antecedentes termini AB, *ab* * CA, *ca* (e), quam conſequentes BC, *bc* (f). Ergo &c. Itaque triangula &c. quod erat oſtendendum.

(a) Lib. V. §. 19.
(b) Lib. IV. §. 11.
(c) §. 65.
(d) §. 1.
(e) Lib. I. §. 51.
(f) Ibid. §. 122.

COROLLARIUM.

Si inter duas rectas parallelas duæ rectæ ſe invicem decuſſent, earum ſegmenta erunt proportionalia.

68 Ut ſi inter rectas parallelas AB, CD duæ rectæ *ab*, *cd* ſe mutuo ſecuerint in puncto *e*, earum ſegmenta erunt proportionalia, erit nempe *ae* . *eb* = *ce* . *ed*. Cum enim Fig. 13. Tab. IV. anguli *aec*, *deb* ſint æquales (a), utpote ad verticem oppoſiti, ſicuti etiam anguli *eac*, *ebd*, necnon anguli *eca*, *edb*, utpote alterni (b), duo triangula *aec*, *deb* erunt ſibi mutuo æquiangula (c), adeoque ſimilia (d). Ergo habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, nempe erit *ae* . *ec* = *eb* . *ed*; adeoque *ae* . *eb* = *ec* . *ed* (e).

THEOREMA V.

Duo triangula habentia unum angulum uni angulo æqualem, & latera circa illum proportionalia, ſunt ſimilia.

Euclid. lib. 6. p. 6. 69 Angulus *bac* trianguli *abc* ſit æqualis angulo BAC trianguli ABC, ſitque latus *ab* ad latus *ac*, ut eſt latus AB ad latus AC. Dico, duo ipſa triangula ABC, *abc* eſſe ſimilia.

Demonſtratio.

Poſito triangulo *abc* ſuper triangulum ABC, duo anguli *bac*, BAC, utpote æquales, ſibi mutuo congruent (f); atque adeo cadet latus *ab* ſuper latus AB, & latus *ac* ſuper latus AC, ſecabitque baſis *bc* latera AB, AC, ut in *fig.* 20. Fig. 20. Cum igitur per hypotheſim habeatur *ab* . *ac* = AB . AC Fig. 21. Tab. III. in triangulo ABC, erit quoque *ab* . AB = *ac* . AC (g), & *invertendo* erit AB . *ab* = AC . *ac* (h). Ergo recta *bc* paral-

(a) Lib. III. §. 51. (c) Lib. V. §. 19. (e) Lib. I. §. 125. (g) Lib. I. §. 125.
(b) Lib. IV. §. 15. (d) §. 66. (f) Lib. V. §. 39. (h) Ibid. §. 121.

parallela erit baſi BC (a); ac proinde erit triangulum *abc* ſimile triangulo ABC (b). Duo itaque triangula &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VI.

Si duo triangula habuerint latera ſibi mutuo proportionalia; erunt ſibi mutuo æquiangula.

70 Duo triangula ABC, *abc* habeant latera ſibi mutuo proportionalia, eſto nempe AB . BC = *ab* . *bc*, BC . CA = *bc* . *ca*, CA . AB = *ca* . *ab*. Dico, duo triangula ABC, *abc* eſſe inter ſe mutuo æquiangula. Euclid. lib. 6. p. 5.

Demonſtratio.

Ad baſim BC trianguli ABC ſint duo anguli DBC, DCB, quorum DBC ſit æqualis angulo *abc* trianguli *abc*, & angulus DCB angulo *acb*. Quoniam igitur duo anguli *abc*, Fig. 14. *acb* minores ſunt duobus rectis (c), duo quoque DBC, Fig. 15. Tab. IV. DCB duobus rectis minores erunt (d). Concurrent ergo rectæ DB, CD in puncto D, ſi in directum producantur (e), triangulum nempe conſtituent BDC. Poſuimus autem angulum DBC æqualem angulo *abc*, & angulum DCB angulo *acb*. Ergo etiam reliquus BDC reliquo *bac* æqualis erit (f). Sunt igitur duo triangula BDC, *abc* inter ſe mutuo æquiangula (g); adeoque ſimilia (h). Quamobrem erit DB . BC = *ab* . *bc* (i). Eſt autem per hypotheſim AB . BC = *ab* . *bc*. Ergo erit etiam DB . BC = AB . BC (k); ac proinde DB = AB (l). Eodem modo oſtendam, duo quoque AC, DC eſſe inter ſe æqualia. Duo autem triangula ABC, DBC habent commune latus BC. Ergo duo ipſa triangula ſunt inter ſe mutuo æquilatera (m); atque

(a) §. 64. (d) Syn. Alg. §. 264. (g) Ibid. §. 19. (k) Lib. I. §. 76.
(b) §. 65. (e) Lib. IV. § 8. (h) §. 66. (l) Ibid. §. 103.
(c) Lib. V. § 42. (f) Lib. V. §. 46. (i) §. 2. (m) Lib. V. § 18.

atque adeo inter ſe mutuo æquiangula (a). Oſtenſum porro eſt, duo triangula DBC, *abc* eſſe inter ſe mutuo æquiangula. Igitur æquiangula itidem inter ſe erunt duo ABC, *abc* (b). Itaque ſi duo triangula &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Triangula plana rectilinea, quorum latera ſint inter ſe proportionalia, ſunt ſimilia.

71 Sunt enim inter ſe mutuo æquiangula, omniaque triangula inter ſe mutuo æquiangula ſunt ſimilia (c).

THEOREMA VII.

In omni triangulo rectangulo recta perpendicularis ducta ab angulo recto ad baſim, duo efficit triangula toti, & inter ſe ſimilia.

Fig. 16. Tab. IV. Ab angulo recto BAC trianguli rectanguli BAC ducatur ad baſim BC recta perpendicularis AE.

I.

Euclid. lib. 6. p. 8. 72 Dico primo, utrumque triangulum AEB, AEC ſimile eſſe toti triangulo ABC.

Demonſtratio.

Cum enim ob hypotheſim angulus AEC ſit rectus (d), æqualis erit angulo BAC (e). Angulus autem ACB communis eſt utrique triangulo ABC, AEC. Ergo reliquus quoque angulus EAC trianguli AEC æqualis erit reliquo angulo ABC trianguli ABC (f). Sunt igitur duo triangula ABC,

(a) Lib. V. §. 85.
(b) §. 33.
(c) § 66.
(d) Lib. III. §. 23.
(e) Ibid. §. 37.
(f) Lib. V. §. 46.

ABC, AEC inter ſe mutuo æquiangula (a). Ergo ſunt ſimilia (b). Eodem modo oſtendam, ſimilia ſibi mutuo eſſe etiam duo AEB, ABC. Igitur &c.

II.

73 Dico ſecundo; duo triangula AEB, AEC eſſe ſibi mutuo ſimilia. Euclid. ibid.

Demonſtratio.

Duo triangula AEB, AEC ſimilia ſunt eidem triangulo ABC (c). Ergo inter ſe quoque ſunt ſimilia (d). In omni igitur triangulo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Si in triangulo rectangulo ab angulo ipſius recto ad baſim recta perpendicularis ducatur, hæc erit media proportionalis inter partes baſis. Latus vero trianguli, quod eſt ad partem, erit media proportionalis inter totam baſim, & ipſam partem.

74 Nimirum ſi ab angulo recto BAC trianguli rectanguli ABC ad baſim BC ducatur recta perpendicularis AE, hæc erit media proportionalis inter partes BE, EC ipſius baſis. Fig. 16. Tab. IV. Latus quoque AC erit media proportionalis inter totam baſim BC, & ſegmentum EC, ſicuti etiam latus BA inter totam BC, & ſegmentum BE. Cum enim duo triangula AEC, AEB ſint ſimilia (e), ſintque ipſorum anguli AEB, AEC æquales (f), utpote recti (g), erunt latera circa illos proportionalia, erit nempe BE. EA = EA. EC, ſive ∺ BE. EA. EC (h). Eandem ob cauſam, cum triangulum AEC ſit ſimile triangulo ABC (i), & angulus ACB ſit utrique communis, erit BC. CA = CA. EC (k), ſive Euclid. lib. 6. Coroll. p. 8.

(a) Lib. V. §. 19. (c) §. 72. (e) §. 73. (g) Ibid. §. 23. (i) §. 72.
(b) §. 66. (d) §. 35. (f) Lib. III. §. 37. (h) §. 1. (k) §. 1.

ve ∺ BC. CA. CE. Eodem modo demonſtrabitur, eſſe ∺ BC. BA. BE.

SCHOLION.

75 Hoc corollarium poteſt aliter, & quidem evidentius oſtendi. Aſſumatur enim in baſe BC ſegmentum FC æquale lateri AC, & in latere AC ſegmentum GC æquale ſegmento EC baſis BC, rectaque ducatur GF. Quoniam igi- Fig.16. Tab.IV. tur latera CG, CE triangulorum AEC, FGC ſunt æqualia, ſicuti etiam latera AC, FC, & angulus ACF eſt communis utrique triangulo, baſis FG æqualis erit baſi AE (a), duoque ipſa triangula AEC, FGC erunt inter ſe mutuo æquilatera (b), atque adeo inter ſe æquiangula (c). Angulus ergo FGC æqualis erit angulo AEC; cum æqualia poſita ſint latera FC, AC. Eſt autem angulus AEB æqualis angulo BAC (d), cum uterque ſit rectus. Ergo angulus quoque FGC angulo BAC æqualis erit (e); rectaque idcirco FG erit rectæ AB parallela (f). Habebitur ergo BC. FC = AC. GC (g). Poſuimus autem AC = FC, & EC = GC. Ergo erit BC. AC = BC. EC (h). Eodem modo demonſtrabitur, eſſe BC. BA = AB. BE, quemadmodum etiam BE. EA = EA. EC.

COROLLARIUM I.

Recta quæcunque in ſemicirculo ſecans diametrum ad angulos rectos eſt media proportionalis inter partes ipſius diametri.

76 Ut ſi in ſemicirculo BAC ducatur recta AE ſecans diametrum BC ad angulos rectos in puncto E, recta EA erit media proportionalis inter partes BE, EC ipſius diametri *BC*. Etenim ductis ab extremo *A* ad extrema *B*, *C* rectis Fig.16. Tab.IV. *AB*, *AC*, angulus *BAC* erit rectus (i), adeoque triangulum *BAC* rectangulum (k). Ergo erit ∺ *BE*. *EA*. *EC* (l).

THEO-

(a) Lib.V. §.73. (d) Lib.III. §.37. (g) §.57.
(b) Ibid. §.18. (e) Syn.Alg. §.259. (h) Lib.I. §.112. (k) Lib.V. §.39.
(c) Ibid. §.85. (f) Lib.IV. §.11. (i) Lib.VII. §.75. (l) §74.

THEOREMA VIII.

Omnia latera homologa duarum figurarum rectilinearum ſimilium eandem inter ſe rationem habent.

77 Sint duæ figuræ rectilineæ ſimiles *ABCDE*, *abcde*; Fig.17.
quarum latera homologa ſint *AB*, *ab* * *BC*, *bc* * *CD*, *cd* * Fig.18.
DE; *de* * *EA*, *ea*, & anguli æquales *ABC*, *abc* * *BCD*, Tab.IV.
bcd * *CDE*, *cde* * *DEA*, *dea* * *EAB*, *eab*. Dico, eandem eſſe rationem omnium laterum homologorum, videlicet eſſe *AB*, *ab* = *BC*. *bc* = *CD*. *cd* = *DE*. *de* = *EA*. *ea*.

Demonſtratio.

Cum enim figuræ ſint ſimiles, habebunt latera circa æquales angulos proportionalia (a), erit nempe *AB*. *BC* = *ab*. *bc*. Igitur *alternando* habebitur quoque *AB*. *ab* = *BC*. *bc* (b). Eodem modo oſtendam, eſſe *BC*. *bc* = *CD*. *cd* &c. Itaque omnia latera homologa &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA IX.

Altitudines triangulorum ſimilium, quorum baſes ſint latera ipſorum homologa, ſunt directe inter ſe, ut eorundem baſes.

78 Tres caſus diſtinguendi ſunt, ut theorema plenius oſtendatur. Vel enim altitudines cadunt intra crura triangulorum, vel extra ipſa, vel cum uno illorum congruunt.

Caſus primus.

Sint igitur primo duo triangula ſimilia *ABC*, *abc*; quo- Fig.19.
rum baſes *BC*, *bc* ſint latera ipſorum homologa, ſintque Fig.20.
propterea æquales anguli *ABC*, *abc* * *BCA*, *bca* * *CAB*, Tab.IV.

(a) §.1. (b) Lib.I. §.125.

cab. Altitudines autem ſint rectæ *AD*, *ad*. Dico, altitudinem *AD* trianguli *ABC* eſſe ad altitudinem *ad* trianguli *abc*, ut eſt baſis *BC* ad baſim *bc*.

Demonſtratio.

Quoniam anguli *ABC*, *abc* æquales ſunt per hypotheſim, ſicuti etiam anguli *ADB*, *adb*, utpote recti (a); etiam reliquus *BAD* trianguli *BAD* erit reliquo *bad* trianguli *bad* æqualis (b). Duo igitur triangula *BAD*, *bad* ſunt inter ſe mutuo æquiangula (c), adeoque ſimilia (d), habentque latera æqualibus angulis oppoſita, nimirum *AD*, *ad* * *BD*, *bd*, homologa (e). Eadem autem eſt ratio omnium laterum homologorum figurarum rectilinearum ſimilium (f). Ergo erit *AD*. *ad* = *BD*. *bd*. Eodem modo demonſtrabitur, eſſe *AD*. *ad* = *DC*. *dc*. Sunt igitur *BD*. *bd* = *DC*. *dc* (g); ac proinde *BD* + *DC*. *bd* + *dc* = *BD*. *bd*, ſive *BC*. *bc* = *BD*. *bd* (h). Oſtenſum eſt autem, eſſe *AD*. *ad* = *BD*. *bd*. Ergo erit quoque *AD*. *ad* = *BC*. *bc* (i).

Caſus ſecundus.

Fig. 21. Fig. 22. Tab. IV. Sint modo duo triangula ſimilia *ABC*, *abc*, quorum altitudines *AD*, *ad* cadant extra eorum baſes, ſcilicet extra latera ipſorum homologa *BC*. *bc*. Dico, eſſe *AD*. *ad* = *BC*. *bc*.

Demonſtratio.

Baſibus in directum productis, cum duo anguli *ACB*, *ACD* æquales ſint duobus *acb*, *acd* (k), utpote tam illi, quam iſti æquales duobus rectis (l), ablatis æqualibus *ACB*, *acb*, erit reliquus *ACD* reliquo *acd* æqualis (m). Æquales ſunt autem etiam duo *ADC*, *adc*, utpote re-
cti

(a) Lib. III. §. 23. (d) §. 66. (g) Lib. I. §. 76. (k) Syn. Alg. § 259.
(b) Lib. V. §. 46. (e) §. 67. (h) Ibid. §. 144. (l) Lib. III. §. 40.
(c) Ibid. §. 19. (f) §. 77. (i) Ibid. § 78. (m) Syn. Alg. §. 266.

ſti (a). Ergo duo quoque DAC, *dac* æquales erunt (b), duoque propterea triangula ACD, *acd*, utpote æquiangula, erunt ſibi mutuo ſimilia (c), habebuntque latera æqualibus angulis oppoſita homologa (d); ac proinde erit AD.*ad* = DC.*dc* = CA.*ca* (e). Eſt autem eandem quoque ob cauſam BC.*bc* = AC.*ac*; cum hujuſmodi latera ſint homologa. Ergo erit BC.*bc* = CD.*cd* (f). Demonſtravimus autem, eſſe AD.*ad* = CD.*cd*. Ergo erit etiam AD.*ad* = BC.*bc* (g).

Caſus tertius.

Altitudines demum triangulorum ſimilium ABC, *abc* coincidant cum lateribus eorumdem homologis AC, *ac*. Dico, altitudines ipſas AC, *ac* eſſe directe inter ſe, ut ipſorum baſes BC. *bc*. Fig. 23. Fig. 24. Tab. IV.

Demonſtratio.

Enimvero, cum per hypotheſim tam baſes BC, *bc*, quam altitudines AC. *ac* triangulorum ABC, *abc* ſint latera ipſorum homologa, manifeſte ſequitur, eſſe AC. *ac* = BC. *bc* (h). Altitudines itaque triangulorum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Altitudines duorum parallelogrammorum ſimilium, quorum baſes ſint latera ipſorum homologa, ſunt directe inter ſe, ut eorundem baſes.

79 Ut ſi duo parallelogramma ſimilia ABCD, *abcd* ita ſpectentur, ut baſes BC, *bc* ſint latera ipſorum homologa, Fig. 1. eorum altitudines DE, *de* erunt directe inter ſe, ut eorundem baſes. Quandoquidem, ductis diagonalibus DB, *db*, Fig. 2. Tab. V.

 cum

(a) Lib III. § 23. (b) Lib V. § 46. (c) § 66. (d) § 67. (e) § 77. (f) Lib. I. § 76. (g) Ibid. § 77. (h) § 77.

cum per hypotheſim anguli BCD, *bcd* ſint æquales, & latera BC, CD * *bc*, *cd* proportionalia, triangulum DBC ſimile erit triangulo *dbc* (a). Sunt autem altitudines DE, *de* triangulorum DBC, *dbc* directe, ut baſes BC, *bc* (b). Ergo &c.

COROLLARIUM II.

Altitudines duorum triangulorum, ſicuti etiam duorum parallelogrammorum ſimilium, quorum baſes ſint latera ipſorum homologa, ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet homologa eorundem latera.

80 Eadem enim eſt ratio omnium laterum homologorum duarum figurarum rectilinearum ſimilium (c), & ratio; quæ uni duarum, vel plurium rationum æqualium æqualis eſt, alteri quoque earundem eſt æqualis (d).

COROLLARIUM III.

Elementa trianguli plani rectilinei decreſcunt in ratione imminutæ altitudinis.

81 Elementum ſcilicet *cd* trianguli ABC eam habet rationem ad elementum BC ejuſdem, quam habet altitudo A*f* Fig. 1. Tab. V. reſpondens elemento *cd* ad altitudinem AD reſpondentem elemento BC. Elementum quoque *ab* eſt ad elementum BC, ut altitudo A*e* ad altitudinem AD. Cum enim trianguli elementa ſint rectæ lineæ baſi parallelæ, duo triangula A*cd*, ABC erunt ſimilia (e), eorumque latera homologa erunt rectæ *cd*, BC (f). Quamobrem habebitur *cd* ad BC, ut eſt altitudo A*f* ad altitudinem AD (g). Eadem ratione erit *ab* ad BC, ut A*e* ad AD.

Geneſis

(a) §.69. (b) §.78. (c) §.77. (d) Lib.I.§.78. (e) §.65. (f) §.67. (g) §.78.

Digitized by Google

Geneſis trianguli plani rectilinei.

82 Hinc triangulum planum rectilineum oritur ex parallela elevatione rectæ lineæ continuo decreſcentis in ratione imminutæ altitudinis. Sic triangulum ABC conſurgit ex tali motu rectæ BC, ut ſibi ſemper ſit parallela, & pro ratione imminutæ altitudinis AD ipſius trianguli continuo minuatur. Fig. 3. Tab. V.

COROLLARIUM I.

83 *Conſurgit propterea triangulum quodcunque planum rectilineum ex tot rectis parallelis, continuo pro ratione imminutæ altitudinis decreſcentibus, quot in ipſa altitudine puncta numerantur.*

COROLLARIUM II.

84 Hinc *ſpectari poteſt triangulum planum rectilineum, veluti factum ex multiplicatione baſis, in ratione imminutæ altitudinis continuo decreſcentis, per ipſam altitudinem.*

THEOREMA X.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

In parallelogrammo ACDB ducatur recta EF parallela lateribus AC, BD ſecans diagonalem BC in puncto K. Tum per punctum ſectionis K ducatur recta GH parallela lateribus AB, CD, conſtitutaque idcirco habeantur duo parallelogramma EKHB, GKFC, quæ circa diametrum BC parallelogrammi ACDB poſita dicuntur. Fig. 4. Tab. V.

85 Dico

I.

Euclid. lib. 6. p. 24. 85 Dico primo, utrumque parallelogrammum EKHB, GKFC ſimile eſſe toti parallelogrammo ACDB.

Demonſtratio.

Cum enim recta *EF* poſita ſit parallela lateri *AC*, angulus *BEF* æqualis erit angulo *BAC* (a), & eadem ratione etiam angulus *GHB* angulum *CDB* æquabit; cum recta *GH* poſita ſit parallela rectæ *CD*. Angulus autem *ABD* communis eſt utrique parallelogrammo *ACDB*, *BEKH*. Ergo tres anguli *BEF*, *GHB*, *ABH* parallelogrammi *EKHB* æquales ſunt tribus angulis *BAC*, *CDB*, *ABD* parallelogrammi *ACDB*; ac proinde etiam reliquus *EKH* erit reliquo *ACD* æqualis (b). Duo igitur parallelogramma *EKHB*, *ACDB* ſunt inter ſe mutuo æquiangula (c). Rurſus cum per hypotheſim recta *EK* in triangulo *ABC* parallela ſit baſi *AC*, erit *BE*. *EK* = *BA*. *AC* (d), quæ ſunt latera circa æquales angulos *BEK*, *BAC*. Eadem ratione erit *KH*. *HB* = *CD*. *DB*; cum in triangulo *CBD* recta *KH* poſita ſit parallela baſi *CD*. Eſt autem recta *BH* æqualis rectæ *EK*, & recta *DB* rectæ *AC* (e). Ergo erit quoque *HK*. *KE* = *DC*. *CA* (f), ſicuti etiam *EB*. *BH* = *AB*. *BD*; cum tam recta *BH* rectam *EK*, quam recta *AC* rectam *BD* adæquet (g). Duo igitur parallelogramma *ACDB*, *BEKH* ſunt inter ſe mutuo æquiangula, & habent latera circa æquales angulos proportionalia. Igitur ſunt ſimilia (h). Eodem modo oſtendam, parallelogrammum quoque *GKFC* ſimile eſſe parallelogrammo *ACDB*; adeoque &c.

II.

Euclid. ibid. 86 Dico ſecundo, parallelogramma *BEKH*, *GKFC* eſſe ſibi mutuo ſimilia.

Demon-

(a) Lib. IV. §. 14. (b) Lib. VI. §. 17. (c) Lib. V. §. 19. (d) §. 60. (e) Lib. VI. §. 20. (f) Lib. I. §. 112. (g) Lib. VI. §. 20. (h) §. 1.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Duo parallelogramma *BEKH*, *GKFC* ſimilia ſunt toti parallelogrammo *ACDB* (a). Ergo inter ſe quoque ſunt ſimilia (b). In omni ergo parallelogrammo &c. quod erat oſtendendum.

LEMMA II.

Parallelogramma ejuſdem altitudinis ſunt inter eaſdem rectas parallelas.

87 Sint duo parallelogramma ABCD, EFGH, quorum altitudines DK, HL æquales ſint inter ſe, eorumque baſes BC, FG in eadem recta BL reperiantur. Dico, ipſa parallelogramma perinde ſe habere, ac ſi inter eaſdem rectas parallelas exiſterent. Fig. 5. Tab. V.

Demonſtratio.

Per extrema puncta D, H ducatur recta DH. Quoniam igitur anguli DKC, HLG ſunt recti (c), duæ rectæ DK, HL erunt parallelæ (d). Sunt autem æquales per hypotheſim. Ergo duæ quoque DH, KL erunt inter ſe parallelæ (e). Latera autem DA, EH parallelogrammorum ABCD, EFGH coincidunt cum recta DH, quemadmodum baſes CB, FG cum recta KL. Quippe ſi ſecus, latera ipſa DA, EH parallela non eſſent lateribus CB, FG, ut eſt evidens. Ergo parallelogramma ABCD, EFGH inter eaſdem rectas parallelas reperiuntur.

THEO-

(a) §.85.
(b) §.35.
(c) Lib III. §.23.
(d) Lib.IV. §.10.
(e) Lib V. §.11.

THEOREMA XI.

Parallelogramma æqualium baſium, & altitudinum ſunt inter ſe æqualia.

88 Sint duo parallelogramma DCBA ; EFGH, quorum
Fig. 5. Tab. V. baſes CB, FG æquales ſint inter ſe, ſicuti etiam ipſorum altitudines DK, HL. Dico, hujuſmodi parallelogramma eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio I.

Ponatur baſis CB $= a$, altitudo DK $= b$, baſis FG $= d$; & altitudo HL $= f$, adeoque parallelogrammum DCBA $= ab$, & parallelogrammum EFGH $= df$ (a). Cum igitur ſit per hypotheſim $a = d$, & $b = f$, erit $ab = df$ (b). Ergo erit quoque DCBA = EFGH (c).

Demonſtratio II.

Cum enim parallelogramma *DCBA*, *EFGH* ſint æqualium altitudinum, erunt in iiſdem rectis parallelis (d). Habent autem æquales baſes per hypotheſim. Ergo parallelogramma ipſa erunt æqualia (e). Itaque parallelogramma &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Si parallelogrammum, & triangulum habuerint æquales baſes, & altitudines, erit parallelogrammum duplum trianguli.

89 Ut ſi baſis *CB* parallelogrammi *DCBA* fuerit æqualis
Fig. 5. Tab. V. baſi FG trianguli FHG, & altitudo DK altitudini HL, erit parallelogrammum *DCBA* duplum trianguli FHG. Conſtituto namque ſuper eandem baſim FG, & ſub eadem altitu-

(a) §.45. (b) Lib.I.§.80. (c) Syn.Alg.§.259. (d) §.87. (e) Lib.VI.§ 34.

titudine HL parallelogrammo EFGH, erit parallelogrammum *DCBA* æquale parallelogrammo EFGH (a). Eſt autem parallelogrammum EFGH duplum trianguli FHG (b). Ergo parallelogrammum quoque *DCBA* duplum erit trianguli FHG (c).

COROLLARIUM II.

Figura plana, cujus elementa decreſcunt in ratione imminutæ altitudinis, eſt medietas illius, cujus elementa ejuſdem continuo quantitatis perſeverant, dummodo utriuſque figuræ eadem ſit baſis, & altitudo.

90 Conſtat enim triangulum planum rectilineum eſſe medietatem parallelogrammi ejuſdem baſis, & altitudinis (d). Elementa autem trianguli continuo decreſcunt pro ratione imminutæ altitudinis (e). Elementa vero parallelogrammi ſunt omnia inter ſe æqualia (f). Ergo &c.

SCHOLION.

91 Diagonalem *CB* parallelogrammi *ABDC* parallelogrammum ipſum in duo æqualia triangula *CBA*, *CBD* dividere, etiam ex methodo indiviſibilium ſuperius expoſita ad evidentiam oſtenditur. Rectæ namque *CD*, *ef*, *cd*, *ab*, *AB* parallelæ inter ſe, ſint omnia elementa parallelogrammi *ABDC*; atque adeo rectæ *AB*, *am*, *cn*, *er* elementa trianguli *ACB*, & rectæ *CD*, *rf*, *nd*, *mb* elementa trianguli *CBD*. Certum in primis eſt, elementa *AB*, *CD* eſſe æqualia. Certum eſt etiam, rectas quoque *Ca*, *Bf* æquales eſſe inter ſe; cum uno tantum puncto tam recta CA ſegmentum *Ca*, quam recta BD ſegmentum *Bf* per hypotheſim excedat. Eſt autem *am*. *a*C = AB. AC, & *rf*. *f*B = CD. DB (g). Ergo, cum ob æqualitatem termino- Fig. 24. Tab. III.

Aa rum

(a) §.88.
(b) Lib.VI.§.28.
(c) Lib.I.§.102.
(d) §.89.
(e) §.81.
(f) §.43.
(g) §.60.

rum AB, CD, ſicuti etiam AC, DB, ſit AB. AC = CD. DB (a), erit quoque *am*. *a*C = *rf*. *f*B (b). Conſtat porro, eſſe *a*C = *f*B. Ergo erit etiam *am* = *rf* (c). Eodem modo oſtendam *cn* = *nd*, *er* = *mb*. Igitur elementa trianguli ACB ſunt numero, & magnitudine æqualia elementis trianguli CBD; atque adeo triangulum ACB triangulo CBD eſt æquale (d). Diagonalis itaque CB parallelogrammum ABDC in duo æqualia triangula dividit.

COROLLARIUM III.

Triangula plana rectilinea ſunt directe inter ſe, ut parallelogramma habentia æquales cum illis baſes, & altitudines.

92 Ut ſi ſuper eadem baſi BC, & ſub eadem altitudine Fig. 6. AD fuerit parallelogrammum BCEF, & triangulum ABC; Fig. 7. ſimiliter ſuper eadem baſi *bc*, & ſub eadem altitudine *ad* Tab. V. parallelogrammum *bcef*, & triangulum *abc*, erit triangulum ABC ad triangulum *abc*, ut eſt parallelogrammum BCEF ad parallelogrammum *bcef*. Cum enim triangulum ABC ſit medietas parallelogrammi BCEF, & triangulum *abc* parallelogrammi *bcef* (e), triangula ABC, *abc* erunt partes aliquotæ ſimiles parallelogrammorum BCEF, *bcef* (f). Ergo triangula ABC, *abc* ſunt, ut ipſa parallelogramma BCEF, *bcef* (g).

COROLLARIUM IV.

Triangula plana rectilinea æqualium baſium, & altitudinum ſunt æqualia.

93 Si nimirum baſes CB, FG triangulorum CDB, FHG Fig. 5. æquales fuerint inter ſe, ſicuti etiam illorum altitudines Tab. V. DK, HL, duo ipſa triangula erunt æqualia. Sunt enim, ut parallelogramma DCBA, EFGH (h), quæ ſunt æqualia (i).

SCHO-

(a) Lib. V §. 102.
(b) Ibid. §. 76.
(c) Lib. I. § 128.
(d) §. 53.
(e) §. 89.
(f) Lib. I §. 37.
(g) Ibid. §. 126.
(h) §. 92.
(i) § 88.

SCHOLION.

94 Hoc corollarium ex ipſa triangulorum geneſi oſtendi itidem poteſt. Sint enim duo triangula plana rectilinea ABC, *abc* æqualium baſium BC, *bc*, & ejuſdem altitudinis *ax*, in qua notentur puncta *m*, *n*, *r*. In ipſis vero triangulis diſtinguantur elementa DE, *de* * FG, *fg* * HK, *hk*, quæ baſibus BC, *bc* parallela, eidem *reſpective* altitudini reſpondeant. Igitur cum recta HK ſit parallela baſi BC, triangulum AHK erit ſimile triangulo ABC (a), eorumque homologa latera erunt BC, HK (b). Quamobrem erit HK ad BC, ut eſt altitudo *ar* ad altitudinem *ax* (c). Eſt autem eandem ob cauſam etiam recta *hk* ad baſim *bc* in triangulo *abc*, ut eſt altitudo *ar* ad altitudinem *ax*. Ergo erit HK . BC = *hk* . *bc* (d). Poſuimus autem BC = *bc*. Ergo erit quoque HK = *hk* (e). Eodem modo oſtendam, eſſe FG = *fg*, & DE = *de*, omniaque demum elementa trianguli ABC æqualia eſſe elementis trianguli *abc*, alterum alteri, quæ nimirum in eadem ſunt altitudine. Sunt autem hujuſmodi elementa in utroque triangulo etiam numero inter ſe æqualia; cum tot ſint in utroque, quot puncta in communi altitudine *ax* numerantur. Ergo duo triangula ABC, *abc* ſunt inter ſe æqualia (f).

Fig. 1. Tab. V.

THEOREMA XII.

Parallelogramma inæqualium baſium, ſed ejuſdem altitudinis ſunt directe inter ſe, ut eorum baſes.

95 Super inæquales baſes BC, *bc*, & ſub æqualibus altitudinibus DE, *de* conſtituta ſint duo parallelogramma ABCD, *abcd*. Dico, parallelogrammum ABCD eſſe ad parallelogrammum *abcd*, ut eſt baſis BC ad baſim *bc*.

Euclid. Lib. 6 P. 1.

(a) §.65.
(b) §.67.
(c) §.78.
(d) Lib.I. §.76.
(e) Ibid. §.128.
(f) §.53.

Demonſtratio I.

Ponatur baſis BC $= y$, baſis $bc = x$, altitudo DE, adeoque etiam altitudo $de = z$. Erit ergo parallelogrammum ABCD $= yz$, & parallelogrammum $abcd = xz$ (a), adeoque ABCD . $abcd = yz . xz$ (b). Eſt autem $yz . xz = y . x$ (c). Ergo erit quoque ABCD . $abcd = y . x$ (d).

Fig. 9. Fig. 10. Tab. V.

Demonſtratio II.

Eſto baſis BC parallelogrammi ABCD dupla baſis bc parallelogrammi $abcd$, & ducatur recta FG, quæ bifariam dividat baſim BC, ſitque lateri AB, atque adeo etiam lateri DC, parallela (e). Duo igitur parallelogramma ABGF, FGCD, utpote habentia æquales baſes, & eandem altitudinem, erunt inter ſe æqualia (f), ſicuti eandem ob cauſam etiam duo FGCD, $abcd$. Parallelogrammum idcirco ABCD duplum erit parallelogrammi FGCD, adeoque etiam parallelogrammi $abcd$ (g). Ergo parallelogrammum ABCD eſt ad parallelogrammum $abcd$, ut eſt baſis BC ad baſim bc. Itaque parallelogramma &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Triangula inæqualium baſium, ſed æqualium altitudinum ſunt directe, ut baſes.

96 Triangula nimirum BDC, bdc inæqualium baſium BC, bc, ſed æqualium altitudinum DE, de ſunt directe inter ſe, ut baſes BC, bc. Sunt enim, ut parallelogramma ABCD, $abcd$ ſuper eaſdem baſes BC, bc, & ſub iiſdem altitudinibus DE, de conſtituta (h).

Euclid. lib. 6. p. 1. Fig. 9. Fig. 10. Tab. V

COROL-

(a) §.45.
(b) Lib I. §.102.
(c) Ibid. §93.
(d) Ibid. §.77.
(e) Lib.IV. §.18.
(f) §.88.
(g) Lib.I. §.112.
(h) §.92.

COROLLARIUM II.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerint altitudinem, ſed baſis trianguli fuerit dupla baſis parallelogrammi, erit triangulum parallelogrammo æquale.

97 Ut ſi baſis BC trianguli BDC fuerit dupla baſis *bc* parallelogrammi *abcd*, æqualem habentis altitudinem *de*, erit triangulum BDC parallelogrammo *abcd* æquale. Conſtituto namque ſuper baſi BC, & ſub eadem altitudine DE parallelogrammo ABCD, erit parallelogrammum ABCD duplum parallelogrammi *abcd* (a). Eſt autem parallelogrammum ABCD duplum etiam trianguli BDC (b). Ergo triangulum BDC erit parallelogrammo *abcd* æquale (c). Fig. 9. Fig. 10. Tab. V.

COROLLARIUM III.

Parallelogramma, ſicuti etiam triangula inæqualium baſium, ſed æqualium altitudinum ſunt reſpective inter ſe inæqualia.

98 Hujuſmodi namque plana ſunt *reſpective* inter ſe, ut baſes.

COROLLARIUM IV.

Baſes parallelogrammorum, & triangulorum ejuſdem altitudinis ſunt directe inter ſe, ut ipſa plana reſpective.

99 Niſi enim baſes parallelogrammorum, & triangulorum ejuſdem altitudinis ſint *directe* inter ſe, ut ipſa plana *reſpective*, neque plana hujuſmodi eſſe poſſunt inter ſe *directe*, ut baſes.

THEO-

(a) §.95. (b) Lib.VI. §.21. (c) Lib.I. §.113.

THEOREMA XIII.

Parallelogramma æqualium baſium, ſed inæqualium altitudinum, ſunt directe inter ſe, ut ipſa altitudines.

100 Super æquales baſes BC, *bc*, & ſub inæqualibus altitudinibus DD, *dd* conſtituta habeantur duo parallelogramma ABCD, *abcd*. Dico, parallelogrammum ABCD eſſe ad parallelogrammum *abcd*, ut eſt altitudo DD ad altitudinem *dd*.

Fig. 11. Fig. 12. Tab. V.

Demonſtratio.

Coincidit cum demonſtratione theorematis præcedentis, ſi altitudines ſpectentur, ut baſes, & baſes, ut altitudines.

COROLLARIUM I.

Triangula æqualium baſium, ſed inæqualium altitudinum ſunt directe, ut altitudines.

101 Videlicet triangula BDC, *bdc* æqualium baſium BC, *bc*, ſed inæqualium altitudinum DD, *dd* ſunt directe inter ſe, ut ipſæ altitudines DD, *dd*. Ipſa namque triangula ſunt, ut parallelogramma ABCD, *abcd* (a).

Fig. 11. Fig. 12. Tab. V.

COROLLARIUM II.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerint baſim; ſed altitudo trianguli fuerit dupla altitudinis parallelogrammi, erit triangulum parallelogrammo æquale.

102 Ut ſi altitudo DD trianguli BDC fuerit dupla altitudinis *dd* parallelogrammi *abcd*, æqualem baſim *bc* cum ipſo triangulo habentis, erit triangulum BDC parallelogram-

Fig. 11. Fig. 12. Tab. V.

(a) §. 92.

grammo *abcd* æquale. Hac enim ſtante hypotheſi, parallelogrammum ABCD eandem baſim habens, atque altitudinem cum triangulo BDC, eſt in eadem ratione ad triangulum BDC, & ad ipſum parallelogrammum *abcd*, ſcilicet dupla (a). Ergo triangulum BDC æquabit parallelogrammum *abcd* (b).

COROLLARIUM III.

Parallelogramma, ſicuti etiam triangula æqualium baſium, & inæqualium altitudinum ſunt reſpective inter ſe inæqualia.

103 Sunt enim tam parallelogramma, quam triangula, ut altitudines.

COROLLARIUM IV.

Altitudines parallelogrammorum, & triangulorum æquales baſes habentium ſunt directe inter ſe, ut ipſa plana reſpective.

104 Enimvero quemadmodum hujuſmodi plana ſunt *directe* inter ſe, ut altitudines, ita viciſſim altitudines erunt, ut ipſa plana *reſpective*, ſi eorum baſes fuerint inter ſe æquales.

THEOREMA XIV.

Parallelogramma inæqualium baſium, & altitudinum ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

105 Super inæquales baſes BC, *bc*, & ſub inæqualibus altitudinibus AD, *ad* conſtituta habeantur duo parallelogramma BCEF, *bcef*. Dico, parallelogrammum BCEF Fig. 6. Fig. 7. eſſe ad parallelogrammum *bcef* in ratione compoſita ex ra- Tab. V.
tione

(a) Lib.VI. § 21. & § 100. hujus. (b) Lib.I. § 111.

tione baſis BC ad baſim bc, & ex ratione altitudinis AD ad altitudinem ad.

Demonſtratio I.

Ponatur baſis BC $= m$, altitudo AD $= x$, baſis $bc = n$, & altitudo $ad = y$. Erit ergo parallelogrammum BCEF $= mx$, & parallelogrammum $bcef = ny$ (a); atque adeo BCEF . $bcef = mx \,.\, ny$ (b). Eſt autem mx ad ny in ratione compoſita ex ratione primæ m ad tertiam n, & ex ratione ſecundæ x ad quartam y (c). Ergo parallelogrammum quoque BCEF erit ad parallelogrammum $bcef$ in ratione compoſita ex ratione baſis BC ad baſim bc, & ex ratione altitudinis AD ad altitudinem ad. Itaque parallelogramma &c. quod erat oſtendendum.

Demonſtratio II.

Ducta recta MP parallela baſi BC ad altitudinem ND altitudini ad parallelogrammi fc æqualem, ut proinde parallelogrammum PMBC ſit æqualis altitudinis cum parallelogrammo fc, ponatur baſis bc ad baſim BC, ut quantitas x ad quantitatem y, & altitudo ND, ſive ad, ad altitudinem AD, ut quantitas y ad quantitatem z. Itaque cum parallelogramma fc, MC habeant æquales altitudines, erit parallelogrammum fc ad parallelogrammum MC, ut baſis bc ad baſim BC (d), ſive ut quantitas x ad quantitatem y. Similiter cum parallelogramma MC, FC habeant eandem baſim, erit parallelogrammum MC ad parallelogrammum FC, ut altitudo ND ad altitudinem AD (e), ſive ut quantitas y ad quantitatem z. Ergo ex *æqualitate rationis* erit parallelogrammum fc ad parallelogrammum FC, ut prima x trium x, y, z ad tertiam z (f). Eſt autem x ad z in ratione compoſita ex ratione primæ x ad ſecundam y, & ex ratione ſecundæ y ad tertiam z (g). Ergo parallelogrammum

(a) §. 45.
(b) Lib I. §. 102.
(c) Ibid. §. 169.
(d) §. 95.
(e) §. 100.
(f) Lib. I. §. 179.
(g) Ibid. §. 176.

mum quoque *fc* erit ad parallelogrammum FC in ratione compoſita ex ratione baſis *bc* ad baſim BC, & ex ratione altitudinis *ad* ad altitudinem AD.

COROLLARIUM.

Triangula inæqualium baſium, & altitudinum ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum.

106 Videlicet triangula BAC, *bac* inæqualium baſium BC, *bc* & altitudinum AD, *ad* ſunt inter ſe in ratione compoſita ex ratione baſium BC, *bc*, & ex ratione altitudinum AD, *ad*. Sunt enim, ut parallelogramma BCEF, *bcef* ſuper eaſdem baſes BC, *bc*, & ſub iiſdem altitudinibus AD, *ad* conſtituta (a). Fig. 6. Fig. 7. Tab. IV.

THEOREMA XV.

Si fuerint quatuor rectæ lineæ geometrice proportionales, rectangulum contentum ſub extremis erit æquale rectangulo contento ſub mediis.

107 Sint quatuor rectæ lineæ A, B, C, D geometrice proportionales, eſto nimirum A. B = C. D. Ex duabus autem extremis A, D fiat rectangulum HLXK, & ex mediis B, C rectangulum EGHF, ita nimirum ut ſit HK = A, HL = D, FH = C, & GH = B. Dico, rectangulum HLXK æquale eſſe rectangulo EGHF. Euclid. lib. 6. p. 16. Fig. 13. Tab. V.

Demonſtratio I.

Facta hypotheſi, ut ſit recta A = *m*, recta B = *n*, recta C = *x*, & recta D = *y*, atque adeo *m*.*n* = *x*.*y*, erit rectangulum HLXK = *my*, & rectangulum EGHF = *nx* (b), adeoque HLXK. EGHF = *my*.*nx* (c). Eſt autem *my* = *nx* (d). Ergo erit quoque HLXK = EGHF (e).

(a) §. 92. (b) §. 45. (c) Lib. I. §. 102. (d) Ibid. §. 82. (e) Ibid. §. 45.

Demonſtratio II.

Duo rectangula HLXK, EGHF ita jungantur in puncto H, ut angulus FHK ſit rectus; latus autem HK ſit æquale rectæ A, latus HG rectæ B, latus FH rectæ C, & latus HL rectæ D. Tum directe productis lateribus EF,XK, donec uniantur in puncto Y, fiat quadrilaterum FHKY. Quoniam igitur duo anguli GHF, FHK per hypotheſim ſunt recti, duæ rectæ GH, HK erunt in directum poſitæ (a), quemadmodum eandem ob cauſam etiam rectæ FH, HL. Cumque parallela ſibi mutuo ſint tam duo latera EF, GH, quam duo HL, KX, parallela quoque erunt tam duo FY, HK, quam duo FH, YK; atque adeo quadrilaterum FHKY erit parallelogrammum (b). Itaque cum parallelogramma HY, HE ſint ſub eadem altitudine, utpote inter eaſdem rectas parallelas EY, GK conſtituta, parallelogrammum HY erit ad parallelogrammum HE, ut eſt baſis HK ad baſim HG (c), ſive ut recta A ad rectam B. Eadem ratione parallelogrammum HY erit ad parallelogrammum HX, ut baſis FH ad baſim HL, ſive ut recta C ad rectam D. Eſt autem A.B = C.D per hypotheſim. Ergo parallelogrammum HY eandem habet rationem ad utrumque parallelogrammum HE, HX. Quamobrem duo parallelogramma HE, HX ſunt inter ſe æqualia (d). Si fuerint ergo quatuor rectæ lineæ &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Lib. III. §. 49.
(b) Lib. VI. §. 8.
(c) §. 95.
(d) Lib. I. §. 110.

COROLLARIUM I.

Si ex quatuor rectis lineis geometrice proportionalibus fiant duo parallelogramma, quorum alterum habeat primam illarum rectarum pro baſi, & quartam pro altitudine, alterum pro baſi habeat ſecundam, & tertiam pro altitudine, duo illa parallelogramma erunt æqualia.

108 Si nimirum ex quatuor rectis A, B, C, D proportionalibus, quæ nimirum ſic ſe habeant, ut ſit A . B = C . D, fiant duo parallelogramma HLXM, FGNO ea quidem lege, ut baſis LX ſit æqualis primæ A, & altitudo MN quartæ D, baſis GN ſit æqualis ſecundæ B, & altitudo OP tertiæ C, duo parallelogramma HLXM, FGNO erunt æqualia. Conſtitutis namque ſuper eaſdem baſes LX, GN, & ſub iiſdem altitudinibus MN, OP duobus rectangulis YLXK, EGNF, rectangulum YLXK erit æquale parallelogrammo HLXM, & rectangulum EGNF parallelogrammo FGNO (a). Eſt autem rectangulum YLXK æquale rectangulo EGNF (b). Ergo parallelogrammum quoque HLXM parallelogrammo FGNO æquale erit (c). Fig. 14. Fig. 15. Tab. V.

COROLLARIUM II.

Parallelogramma reciprocantia ſibi mutuo baſes, & altitudines ſunt æqualia.

109 Æqualia nimirum ſunt duo parallelogramma HLXM, FGNO, ſi fuerit baſis LX ab baſim GN, ut eſt altitudo OP ad altitudinem MN. Patet ex præcedenti. Fig. 14. Fig. 15. Tab. V.

(a) §. 88. (b) §. 107. (c) Syn. Alg. §. 259.

COROLLARIUM III.

Triangula reciprocantia ſibi mutuo baſes, & altitudines ſunt æqualia.

110 Ut ſi baſis BC trianguli BAC fuerit ad baſim *bc* trianguli *bac*, quemadmodum altitudo *ae* ad altitudinem AE, triangula BAC, *bac* erunt æqualia. Sunt enim inter ſe, ut parallelogramma DBCA, *dbca* (a), quæ ſunt æqualia (b).

Fig. 1. Fig. 2. Tab. IV.

COROLLARIUM IV.

Si fuerint tres rectæ lineæ continuo geometrice proportionales, rectangulum contentum ſub extremis eſt æquale quadrato mediæ.

111 Ut ſi fuerint tres rectæ A, B, C continuo geometrice proportionales, rectangulum contentum ſub extremis A, C erit æquale quadrato mediæ B. Poſita namque recta D, quæ ſit æqualis ſecundæ B, erit A. B = D. C; atque adeo rectangulum contentum ſub extremis A, C æquale rectangulo contento ſub mediis B, D (c). Rectangulum autem contentum ſub mediis B, D eſt quadratum mediæ B; cum ſit per hypotheſim B = D. Ergo &c.

Euclid. lib. 6. p. 17. Fig. 17. Tab. V.

SCHOLION.

112 Hinc brevius oſtenditur, *in omni triangulo rectangulo quadratum hypotenuſæ æquare quadrata laterum ſimul ſumta*. Ducatur enim ab angulo recto BAC trianguli rectanguli BAC ad baſim BC recta perpendicularis AO. Erit AC media proportionalis inter totam baſim BC, & ſegmentum OC, & BA erit media proportionalis inter totam baſim BC, & ſegmentum BO (d). Igitur quadratum ACKH erit æquale rectan-

Fig. 17. Tab. II.

(a) §. 92. (b) §. 109. (c) §. 107. (d) §. 74.

ctangulo OLEC contento ſub ſegmento OC, & recta CE ipſi BC æquali, & quadratum FBAG erit æquale rectangulo BOLD, quod ſub ſegmento BO, & recta BD, ſive BC, cui illa æqualis eſt, continetur (a). Duo igitur quadrata ACKH, FBAG ſimul ſumta æqualia ſunt rectangulis OLEC, BOLD ſimul itidem ſumtis. Quadratum autem BDEC hypotenuſæ BC eſt æquale rectangulis OLEC, BOLD (b). Ergo duobus ſimiliter quadratis ACKH, FBAG ſimul ſumtis quadratum ADEC æquale erit (c).

COROLLARIUM V.

Quadratum rectæ in ſemicirculo perpendiculariter inſiſtentis diametro eſt æquale rectangulo contento ſub ſegmentis ipſius diametri.

113 Quadratum ſcilicet rectæ AE in ſemicirculo BAC perpendiculariter inſiſtentis diametro BC, adæquat rectangulum contentum ſub ſegmentis BE, EC ipſius diametri BC. Recta namque AE eſt media proportionalis inter ſegmenta BE, EC ipſius diametri (d). Fig. 16. Tab. IV.

THEOREMA XVI.

Si datis quatuor rectis lineis, rectangulum contentum ſub extremis æquale fuerit rectangulo contento ſub mediis, quatuor illæ lineæ erunt geometrice proportionales.

114 Sint quatuor rectæ A, B, C, D. Ex duabus autem extremis A, D fiat rectangulum HLXK, & ex mediis B, C rectangulum EGHF, ita nimirum ut latus HK ſit æquale rectæ A, latus HL rectæ D, latus FH rectæ C, & latus HG rectæ B. Rectangulum porro HLXK ſit æquale rectangulo EGHF. Dico, rectas A, B, C, D eſſe geometrice proportionales. Euclid. lib. 6. p. 16. Fig. 11. Tab. V.

Demon-

(a) §. 111. (b) Syn. Alg. §. 456. (c) ibid. §. 261. (d) §. 74.

Demonſtratio I.

Ponatur recta A = *m*, recta B = *n*; recta C = *x*, & recta D = *y*, atque adeo rectangulum HLXK = *my*, & rectangulum EGHF = *nx* (a); ac proinde HLXK . EGHF = *my* . *nx* (b). Quoniam igitur habetur per hypotheſim HLXK = EGHF, erit quoque *my* = *nx* (c); ac proinde *m* . *n* = *x* . *y* (d). Quamobrem erit etiam A . B = C . D.

Demonſtratio II.

Duo rectangula HLXK, EGHF ita jungantur in puncto H, ut angulum rectum FHK in illo conſtituant. Tum lateribus EF, XK in directum productis, fiat quadrilaterum FHKY, quod erit parallelogrammum (e); cum duæ HL, KX, ſicuti etiam duæ EF, GH ſint parallelæ (f). Quoniam igitur duo anguli GHF, FHK ſunt recti, quemadmodum etiam duo FHK, KHL, tam duæ rectæ GH, HK, quam duæ FH, HL erunt in directum poſitæ (g). Quamobrem duo parallelogramma EGHF, FHKY erunt ejuſdem altitudinis, utpote in iiſdem parallelis conſtituta, ſicuti eandem ob cauſam etiam duo FHKY, HLXK. Parallelogrammum ergo FHKY erit ad parallelogrammum EGHF, ut eſt baſis HK ad baſim HG, & parallelogrammum FHKY erit ad parallelogrammum HLXK, ut eſt baſis FH ad baſim HL (h), ſive ratio baſis HK ad baſim HG eadem erit cum ratione parallelogrammi FHKY ad parallelogrammum EGHF, & ratio baſis FH ad baſim HL eadem cum ratione parallelogrammi FHKY ad parallelogrammum HLXK. Eadem autem eſt ratio parallelogrammi FHKY ad utrumque parallelogrammum EGHF, HLXK (i); cum duo parallelogram-

(a) §.45.
(b) Lib.I.§.102.
(c) Ibid.§.45.
(d) Ibid.§.14.
(e) Lib.VI.§.8.
(f) Ibid.§.9.
(g) Lib.III.§.49.
(h) §.95.
(i) Lib.I.§.112.

Digitized by Google

logramma EGHF, HLXK poſita ſint æqualia. Ergo ratio quoque baſis HK ad baſim HG eadem erit cum ratione baſis FH ad baſim HL (a), ſeu erit HK . HG = FH . HL; ac proinde, cum ſit HK = A, HG = B, FH = C, & HL = D per conſtructionem, erit A . B = C . D. Itaque ſi datis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Rectangula æqualia habent latera reciproce proportionalia.

115 Demonſtravimus enim, in rectangulis æqualibus *EGHF*, *HLXK* latus *LX* eſſe ad latus *GH*, ut eſt latus *EG* ad latus *HL*. Fig. 13. Tab. V.

COROLLARIUM II.

Parallelogramma æqualia reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

116 Ut ſi parallelogrammum HLXM æquale fuerit parallelogrammo FGNO, altitudo OP parallelogrammi FGNO erit ad altitudinem MN parallelogrammi HLXM, ut eſt hujus baſis LX ad illius baſim GN. Enimvero conſtitutis ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus rectangulis YLXK, EGNF, erit rectangulum YLXK æquale parallelogrammo HLXM, & rectangulum EGNF parallelogrammo FGNO (b). Duo autem parallelogramma HLXM, FGNO poſita ſunt æqualia. Ergo duo quoque rectangula YLXK, EGNF inter ſe æqualia erunt (c). Eſt autem latus FN rectanguli EGNF ad latus KX rectanguli YLXK, ut eſt latus LX ad latus GN (d); ſuntque latera FN, KX æqualia altitudinibus OP, MN parallelogrammorum FGNO, HLXM per hypotheſim, & latera LX, GN ſunt eorundem baſes. Ergo æqualia paralle- Fig 14. Fig. 15. Tab. V.

(a) Ibid. §.76.
(b) §.80.
(c) Syn. Alg. §.299.
(d) §.115.

rallelogramma HLXM, FGNO reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

COROLLARIUM III.

Triangula æqualia reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines.

117 Si nimirum æqualia inter ſe mutuo fuerint triangula ABC, *abc*, erit altitudo *ae* ad altitudinem AE, ut eſt baſis BC ad baſim *bc*. Conſtitutis namque ſuper eaſdem baſes, & ſub iiſdem altitudinibus parallelogrammis DBCA, *dbca*, hæc erunt æqualia (a), utpote eandem rationem habentia ad æqualia ipſa triangula (b). Parallelogramma autem DBCA, *dbca* reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines (c). Ergo ipſa quoque triangula baſes, & altitudines, cum iſtæ ab illis diverſæ non ſint, ſibi mutuo reciprocabunt.

Fig. 1. Fig. 2. Tab. IV.

COROLLARIUM IV.

Si quadratum fuerit rectangulo æquale, latus quadrati erit media proportionalis inter latera ipſius rectanguli.

118 Si nimirum quadratum ABCD fuerit æquale rectangulo EGNF, latus BC ipſius quadrati erit *media proportionalis* inter latera EG, GN dati rectanguli. Conſtat enim, latus ſive baſim GN rectanguli EGNF eſſe ad latus, ſive ad baſim BC quadrati ABCD, ut eſt ejuſdem quadrati latus ſive altitudo DC ad latus ſive ad altitudinem EG ipſius rectanguli (d). Eſt autem latus BC lateri DC æquale (e). Ergo latus BC quadrati ABCD erit *media proportionalis* inter latera EG, GN rectanguli EGNF.

Fig. 15. Fig. 16. Tab. V. Euclid. lib. 6. p. 17.

THEO-

(a) Lib. I. §. 103. (b) §. 89. (c) §. 116. (d) §. 115. (e) Lib. VI. §. 2.

THEOREMA XVII.

Quadrilatera, & polygona ſimilia in totidem ex æquo ſimilia triangula reſolvi poſſunt.

I.

119 Sint duo quadrilatera ſimilia ABCD, *abcd*, habentia nimirum æquales angulos DAB, *dab* * ABC, *abc* * BCD, *bcd* * CDA, *cda*, & latera circa illos proportionalia. Ab angulis autem æqualibus D, *d* ad æquales oppoſitos B, *b* ducantur rectæ DB, *db*, atque adeo duo ipſa quadrilatera in duo triangula ſint diviſa. Dico, triangulum DBA ſimile eſſe triangulo *dba*, & triangulum DBC triangulo *dbc*. Fig. 1. Fig. 2. Tab. V.

Demonſtratio.

Angulus namque BAD trianguli DBA æqualis poſitus eſt angulo *bad* trianguli *dba*, & latera circa illos proportionalia. Ergo duo triangula DBA, *dba* ſunt ſimilia (a). Eodem modo oſtendam, ſimilia eſſe duo quoque triangula BDC, *bdc*. Igitur &c.

II.

120 Duo pentagona ABCDE, *abcde* ſint ſimilia, æquales nempe ſint ipſorum anguli ABC, *abc* * BCD, *bcd* * CDE, *cde* * DEA, *dea* * EAB, *eab*, & latera circa illos proportionalia. Dico, ipſa pentagona in totidem ex æquo ſimilia triangula reſolvi poſſe. Fig. 18 Fig. 19 Tab. V.

Demonſtratio.

Supra homologa ipſorum latera CD, *cd* habeantur duo

(a) §. 69.

ſimilia triangula CMD, *cmd*, quorum æquales anguli ſint MDC, *mdc* * MCD, *mcd* * CMD, *cmd*; & homologa latera MD, *md* * MC, *mc* * CD, *cd*. Tum ex illorum apicibus M, *m* ad ſingulos ipſorum pentagonorum angulos ducantur rectæ ME, MA, MB, *me*, *ma*, *mb*. Quoniam igitur duo anguli CDE, *cde* æquales ſunt inter ſe, ſicuti etiam duo CDM, *cdm*, reliquus itidem MDE reliquo *mde* æqualis erit (a). Sunt autem latera circa illos proportionalia, videlicet MD. DE = *md*. *de* (quandoquidem, cum propter triangulorum CMD, *cmd* ſimilitudinem jam ſit MD. *md* = CD. *cd*, ſicuti etiam propter ſimilitudinem polygonorum habeatur ED. *ed* = CD. *cd* (b), erit quoque MD. *md* = ED. *ed* (c); ac proinde MD. ED = *md*. *ed* (d). Igitur duo triangula MED, *med* erunt ſibi mutuo ſimilia (e). Eodem modo hinc oſtendam, ſimilia eſſe etiam duo EMA, *ema*, tum duo AMB, *amb*, ac demum duo BMC, *bmc*. Hæc autem triangula tot ſunt in utroque pentagono, quot ſunt ipſorum latera. Ergo duo ſimilia pentagona ABCDE, *abcde* in totidem ex æquo ſimilia triangula reſolvi poſſunt. Quadrilatera igitur, & polygona ſimilia &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

121 Aliter quoque fieri poteſt reſolutio polygonorum ſimilium in triangula numero æqualia, & magnitudine ſimilia. Sint enim duo ſimilia pentagona ABCDE, *abcde*, quorum æquales anguli ſint ABC, *abc* * BCD, *bcd* * CDE, *cde* * DEA, *dea* * EAB, *eab*, & latera circa illos proportionalia. Ducantur autem ab æqualibus angulis A, *a* ad æquales C, *c*, necnon ad æquales D, *d* rectæ AC, *ac* * AD, *ad*. Quoniam igitur anguli ABC, *abc* ſunt æquales, & latera circa illos proportionalia, duo triangula ACB, *acb* erunt ſimilia (f). Rurſus cum, ob ſimilitudinem ipſorum triangulorum ACB, *acb*, anguli BCA, *bca* ſint æquales (g), & per hypotheſim æquales ſint anguli BCD,

Fig. 17. Fig. 18. Tab. IV.

(a) Lib. 5. §. 46. (b) §. 77. (c) Lib. I. §. 76. (d) Ibid. §. 125. (e) §. 69. (f) Ibid. (g) §. 1.

BCD, *bcd*, ablatis æqualibus BCA, *bca*, erit reliquus ACD reliquo *acd* æqualis (a). Conſtat autem, eſſe BC. *bc* = CD. *cd* (b), cum hujuſmodi latera ſint homologa, eandemque ob cauſam etiam AC. *ac* = BC. *bc*. Ergo erit quoque AC. *ac* = CD. *cd* (c); ac proinde AC. CD = *ac*. *cd* (d). Quamobrem duo triangula ACD, *acd* habent angulos ACD, *acd* æquales, & latera circa illos proportionalia. Igitur ſunt ſibi mutuo ſimilia (e). Eodem modo demonſtrabuntur ſimilia duo quoque triangula ADE, *ade*. Igitur &c.

COROLLARIUM.

Polygona regularia ejuſdem generis in totidem ex æquo ſimilia triangula reſolvi poſſunt.

122 Polygona ſiquidem regularia ejuſdem generis ſunt ſibi mutuo ſimilia (f).

LEMMA III.

Polygonum quodcunque regulare in totidem triangula iſoſcelia æqualia reſolvi poteſt, quot ſunt ipſius latera.

123 Eſto pentagonum regulare ABCDE, cujus centrum ſit punctum M. Dico, illud in quinque triangula iſoſcelia æqualia reſolvi poſſe. Fig. 11 Tab. V

Demonſtratio.

Ex illius centro M ad ſingulos ejuſdem angulos ducantur radii MA, MB, MC, MD, ME. Manifeſtum eſt, pentagonum diviſum eſſe in quinque triangula, quot nimirum ſunt ipſius latera. Baſes autem horum omnium triangulorum, videlicet AB, BC, CD, DE, EA æquales ſunt inter ſe (g), ſicuti etiam ipſorum latera MA, MB, MC, MD,

(a) ...em. Alg. §. 266. (b) §. 77. (c) Lib. I. §. 78. (d) Ibid. §. 125. (e) §. 77. (f) §. 3. (g) Lib. V. §. 20.

ME (a). Ergo omnia illa triangula ſunt iſoſcelia (b), atque omnino inter ſe æqualia (c). Polygonum itaque regulare &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Anguli verticales iſoſcelium triangulorum, in quæ polygonum regulare dividitur, ſunt omnes inter ſe æquales.

124 Æquales nimirum ſunt omnes anguli verticales CMD,
Fig. 11. DME, EMA, AMB, BMC iſoſcelium triangulorum, in quæ
Tab. V. diviſum eſt pentagonum regulare ABCDE. Habent enim ipſa triangula tum baſes, tum latera inter ſe æqualia.

COROLLARIUM II.

Angulus verticalis ſingulorum iſoſcelium triangulorum, in quæ polygonum regulare dividitur, eam habet rationem ad quatuor rectos, quam ipſius trianguli baſis, ſive polygoni latus ad totum ejuſdem perimetrum.

125 Angulus nempe verticalis CMD trianguli CMD eam habet rationem ad quatuor rectos, quam latus, ſive baſis
Fig. 11. CD ipſius trianguli ad totum pentagoni ABCDE perime-
Tab. V. trum. Cum enim omnes anguli verticales iſoſcelium triangulorum, in quæ pentagonum ABCDE reſolvitur, ſint æquales inter ſe (d), totque ſint ipſa triangula, atque adeo tot ſint ipſi anguli verticales ad centrum M exiſtentes, quot ſunt ipſius pentagoni latera, quæ itidem omnia inter ſe ſunt æqualia (e), erit angulus CMD quinta pars quatuor rectorum, qui circa punctum M fieri poſſunt (f), quemadmodum latus CD eſt quinta pars totius perimetri ABCDE. Ergo ratio anguli CMD ad quatuor rectos diverſa ab ea non eſt, quam habet latus CD ad totum pentagoni perimetrum ABCDE.

THEO-

(a) §. 19. (b) Lib. V. §. 25. (f) Ibid. §. 14. (d) §. 124. (e) Lib. V. §. 20. (f) Lib. III. §. 44.

THEOREMA XVIII.

Si ex centro polygonorum regularium ejuſdem generis ad ſingulos ipſorum angulos radii ducantur, diviſa erunt ipſa polygona in totidem ex æquo triangula ſibi mutuo ſimilia.

126 Sint duo pentagona regularia ABCDE, *abcde*. Ex Fig. 18. Fig. 19. Tab. V. centro autem M pentagoni ABCDE ducantur ad ſingulos ipſius angulos radii MA, MB, MC, MD, ME, & ex centro *m* pentagoni *abcde* ad ejus angulos radii *ma*, *mb*, *mc*, *md*, *me*; ut proinde diviſum ſit utrumque pentagonum in quinque triangula. Dico, hujuſmodi triangula eſſe ſibi mutuo ſimilia.

Demonſtratio.

Cum enim triangula, in quæ diviſum eſt pentagonum ABCDE ſint iſoſcelia æqualia, ſicuti etiam triangula, in quæ pentagonum *abcde* eſt diviſum (a), angulus verticalis CMD trianguli CMD erit ad quatuor rectos, ut eſt baſis CD ad totum perimetrum ABCDE (b). Eadem ratione angulus verticalis *cmd* trianguli *cmd* erit ad quatuor rectos, ut ejus baſis *cd* ad totum perimetrum *abcde*. Eadem eſt autem ratio utriuſque lateris CD, *cd* ad ſuum reſpective perimetrum, nempe *ſubquintupla*. Ergo eadem quoque erit ratio utriuſque anguli CMD, *cmd* ad quatuor rectos; atque adeo duo ipſi anguli erunt æquales (c). Conſtat autem, eſſe latus MC ad latus MD, ut eſt latus *mc* ad latus *md*; cum ſit MC = MD, & *mc* = *md* (d). Ergo duo triangula CMD, *cmd* ſunt ſibi mutuo ſimilia (e). Singula porro triangula, in quæ diviſum eſt pentagonum ABCDE, iſoſcelia ſunt, & omnino inter ſe æqualia, ſicuti etiam ſingula, in quæ diviſum eſt pentagonum *abcde* (f). Ergo ſingula ſingulis ſunt ſimilia. Itaque ſi a centro polygonorum &c. quod erat &c.

COROL-

(a) §. 123.
(b) §. 125.
(c) Lib. I. §. 103.
(d) §. 19.
(e) §. 69.
(f) §. 123.

COROLLARIUM.

Radii polygonorum regularium ejuſdem generis ſunt latera homologa triangulorum iſoſcelium ſimilium, in quæ illorum ope ipſa polygona reſolvuntur.

127 Radii nimirum MC, *mc* pentagonorum regularium ABCDE, *abcde* ſunt latera homologa triangulorum ſimilium CMD, *cmd*. Æqualibus namque angulis MDC, *mdc* opponuntur. Idipſum de aliis dicito.

THEOREMA XIX.

Radii, & cateti polygonorum regularium ejuſdem generis ſunt directe inter ſe, ut duo qualibet homologa ipſorum latera.

Fig. 18. Fig. 19. Tab. V. Sint duo pentagona regularia ABCDE, *abcde*, quorum radii ſint rectæ MC, *mc*; cateti vero rectæ MN, *mn*.

I.

128 Dico primo, radium MC eſſe ad radium *mc*, ut latus CD ad latus ſibi homologum *cd*.

Demonſtratio.

Ductis radiis MD, *md*, duo triangula CMD, *cmd* ſunt ſimilia (a), eorumque latera homologa ſunt radii MC, *mc* (b). Eadem autem eſt ratio omnium laterum homologorum in triangulis ſimilibus (c). Ergo erit MC.*mc* = CD.*cd*.

II.

129 Dico ſecundo, catetum quoque MN eſſe ad catetum *mn*, ut latus CD ad latus ſibi homologum *cd*.

Demon-

(a) §. 126. (b) §. 127. (c) §. 77.

Demonſtratio.

Cateti MN, *mn* ſunt altitudines triangulorum ſimilium CMD, *cmd* (a). Ergo ipſi cateti MN, *mn* erunt inter ſe, ut latera homologa CD.*cd* (b). Itaque radii, & cateti &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Cateti polygonorum regularium ejuſdem generis ſunt directe inter ſe, ut ipſorum radii.

130 Cum enim tam radii, quam cateti ſint inter ſe, ut duo quælibet homologa ipſorum polygonorum latera, radiorum, & catetorum in polygonis regularibus ejuſdem generis eadem quoque erit ratio (c).

THEOREMA XX.

Perimetri duarum figurarum rectilinearum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet homologa ipſorum latera.

131 Sint duæ figuræ rectilineæ ſimiles ABCDE, *abcde*, Fig. 18.
quorum homologa latera ſint AB, *ab* * BC, *bc* * CD, *cd* Fig. 19.
* DE, *de* * EA, *ea*. Dico, perimetrum ABCDE eſſe ad Tab. V.
perimetrum *abcde*, ut duo quælibet homologa ipſorum latera CD, *cd*.

Demonſtratio.

Cum enim per hypotheſim ſit CD.*cd* = DE.*de* = EA.*ea* = AB.*ab* = BC.*bc* (d), erit CD + DE + EA + AB + BC.*cd* + *de* + *ea* + *ab* + *bc* = CD.*cd* (e). Eſt autem ABCDE = CD + DE + EA + AB + BC, & *abcde* = *cd*

(a) §. 24.
(b) §. 78.
(c) Lib. I. §. 96.
(d) §. 77.
(e) Lib. I. §. 144.

$= cd + de + ea + ab + bc$ (a). Ergo erit ABCDE. $abcde$ $=$ CD. cd. Perimetri ergo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Perimetri polygonorum regularium ejuſdem generis ſunt directe inter ſe, ut duo quælibet ipſorum latera.

132 Polygona ſiquidem regularia ejuſdem generis ſunt ſimilia (b), & quodlibet latus unius eſt homologum cuilibet lateri alterius (c).

COROLLARIUM II.

Perimetri polygonorum regularium ejuſdem generis ſunt directe inter ſe, ut ipſorum radii, & cateti.

133 Videlicet perimeter pentagoni regularis ABCDE eſt ad perimetrum pentagoni itidem regularis $abcde$, ut radius MC ad radium mc, ſicuti etiam ut catetus MN ad catetum mn. Cum enim ſit ABCDE. $abcde =$ CD. cd (d), & MC. $mc =$ CD. cd (e), nec non MN. $mn =$ CD. cd (f), erit quoque ABCDE. $abcde =$ MC. mc, ſicuti etiam ABCDE. $abcde =$ MN. mn (g).

THEOREMA XXI.

Inæqualium circulorum æquales anguli tum ad centrum, tum ad peripheriam ſimilibus arcubus inſiſtunt; & viciſſim anguli tam ad centrum, quam ad peripheriam, qui ſimilibus arcubus inſiſtunt, inter ſe ſunt æquales.

I.

134 Sint duo inæquales circuli ADC, adc, ad quorum cen-

(a) Syn.Alg §. 256. (c) §. 4. (e) §. 128. (g) Lib.I. §. 78.
(b) §. 3. (d) §. 131. (f) §. 129.

centrum E, *e* habeantur æquales anguli AEC, *aec*. Dico, arcus ABC, *abc*, quibus illi inſiſtunt, eſſe inter ſe æquales. Fig. 1. Fig. 2. Tab. VI.

Demonſtratio.

Cum enim anguli AEC, *aec* ſint æquales, eandem ad quatuor rectos rationem habebunt (a). Eſt autem arcus ABC ad totam peripheriam ADB, ut angulus AEC ad quatuor rectos, ſicuti etiam arcus *abc* ad totam peripheriam *adb*, ut angulus *aec* ad quatuor rectos (b). Ergo eadem erit ratio utriuſque arcus ABC, *abc* ad totam ſui circuli peripheriam; atque adeo arcus ipſi ABC, *abc* ſunt ſibi mutuo ſimiles (c).

II.

135 Æquales modo ſint anguli ADC, *adc* ad peripheriam. Dico, arcus ABC, *abc*, quibus inſiſtunt, eſſe ſibi mutuo ſimiles.

Demonſtratio.

Conſtitutis namque ad centrum angulis AEC, *aec*, qui iiſdem arcubus ABC, *abc* inſiſtant, cum angulus AEC duplus ſit anguli ADC, & angulus *aec* anguli *adc* (d), quemadmodum duo anguli ADC, *adc* poſiti ſunt inter ſe æquales, ita duo AEC, *aec* inter ſe æquales erunt (e). Ergo arcus ABC, *abc* erunt ſibi mutuo ſimiles (f).

III.

136 Viciſſim autem ſimiles ſint ſibi mutuo arcus *ABC*, *abc*. Dico, angulos ad centrum *AEC*, *aec* illis inſiſtentes eſſe inter ſe æquales.

(a) Lib. I. §. 102. (b) Lib. VII. §. 28. (c) §. 5. (d) Lib. VII. §. 71. (e) Lib. I. §. 103. (f) §. 134.

Demonſtratio.

Etenim ob ſimilitudinem arcuum *ABC*, *abc*, eadem erit utriuſque ratio ad totam ſui circuli peripheriam (a). Eſt autem uterque angulus *AEC*, *aec* ad quatuor rectos, ut ſunt arcus *ABC*, *abc* ad integram peripheriam ſui circuli (b). Ergo uterque angulus *AEC*, *aec* eandem ad quatuor rectos rationem habebit; atque adeo erunt inter ſe æquales (c).

IV.

137 Demum duo anguli ad peripheriam poſiti *ADC*, *adc* ſimilibus arcubus *ABC*, *adc* inſiſtant. Dico, angulos *ADC*, *adc* eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Enimvero, ſi ad centrum ipſorum circulorum conſtituantur duo anguli *AEC*, *aec* iiſdem inſiſtentes arcubus *ABC*, *abc*, duo ipſi anguli *AEC*, *aec* erunt inter ſe æquales (d). Eſt autem angulus *ADC* medietas anguli *AEC*, & angulus *adc* anguli *aec* (e). Ergo duo quoque anguli *ADC*, *adc* inter ſe æquales erunt (f). Inæqualium itaque circulorum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si fuerint duo, vel plures circuli concentrici, ex quorum communi centro ad majoris peripheriam duo radii ducantur, arcus, quos illi intercipiunt, erunt ſibi mutuo ſimiles.

Fig. 3. Tab. IV. 138 Similes nimirum ſibi mutuo erunt arcus *AC*, *EF* circulorum concentricorum *ABC*, *EFG*, quos intercipiunt radii

(a) §. 5. (b) Lib VII. §. 28. (c) Lib. I. §. 103. (d) §. 136. (e) Lib. VII. §. 71. (f) Lib. I. §. 100.

dii *DA*, *DC*: Idem ſiquidem angulus *ADC* ad commune centrum poſitus utrique arcui inſiſtit.

THEOREMA XXII.

Arcus inæqualium circulorum, qui æquales angulos capiunt, ſunt ſibi mutuo ſimiles. Et viciſſim arcus ſimiles inæqualium circulorum æquales angulos comprehendunt.

I.

139 Æquales ſint anguli *ABC*, *abc*, quos capiunt arcus *ABC*, *abc* circulorum inæqualium *ADC*, *adc*. Dico, arcus *ABC*, *abc* eſſe ſibi mutuo ſimiles. Fig. 1. Fig. 2. Tab. VI.

Demonſtratio.

Sumantur in peripheriis ipſorum circulorum puncta *D*, *d*, atque ab his ad extrema arcuum *ABC*, *abc* ducantur duæ rectæ *DA*, *DC*, *da*, *dc*, conſtitutaque ſint duo quadrilatera *ADCB*, *adcb*. Quoniam igitur tam duo anguli *ABC*, *ADC*, quam duo *abc*, *adc* valent duos rectos (a), duo anguli *ABC*, *ADC* duobus *abc*, *adc* æquales erunt (b). Duo autem *ABC*, *abc* poſiti ſunt æquales. Ergo duo quoque *ADC*, *adc* inter ſe æquales erunt (c); duoque idcirco arcus *ABC*, *abc*, quibus inſiſtunt, erunt ſibi mutuo ſimiles (d).

II.

140 Viciſſim vero ſimiles ſint arcus *ABC*, *abc*. Dico, angulos *ABC*, *abc*, quos arcus ipſi comprehendunt, eſſe inter ſe æquales.

(a) Lib. VII. §. 82.
(b) Syn. Alg. §. 259.
(c) Ibid. §. 266.
(d) §. 135.

Demonſtratio.

Etenim iiſdem poſitis, ſtante ſimilitudine arcuum *ABC*, *abc*, anguli *ADC*, *adc* erunt æquales (a). Sunt autem duo anguli *ABC*, *ADC* æquales duobus *abc*, *adc* (b); cum tam illi, quam iſti valeant duos rectos (c). Ergo ſublatis æqualibus *ADC*, *adc*, reliquus *ABC* reliquo *abc* æqualis erit (d). Arcus itaque inæqualium &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Si inæqualibus circulis demantur arcus ſimiles, qui remanent, arcus ſibi quoque mutuo erunt ſimiles.

Fig. 1. Fig. 2. Tab. VI. 141 Si nimirum inæqualibus circulis *ADC*, *adc* demantur ſimiles arcus *ABC*, *abc*, arcus *ADC*, *adc*, qui ſuperſunt, ſibi mutuo erunt ſimiles. Oſtenſum eſt enim, æquales eſſe angulos *ADC*, *adc*, quos ipſi arcus reſidui *ADC*, *adc* comprehendunt.

THEOREMA XXIII.

Chordæ arcuum ſimilium ſunt directe inter ſe, ut circulorum radii.

Fig. 18. Fig. 19. Tab. V. 142 Duorum inæqualium circulorum, quorum radii ſint rectæ *MC*, *mc*, ſpectentur duo arcus ſimiles *CXD*, *cxd*. Horum autem chordæ ſint rectæ *CD*, *cd*. Dico, chordam *CD* eſſe ad chordam *cd*, ut eſt radius *MC* ad radium *mc*.

Demonſtratio.

Ductis radiis *MD*, *md* ad extrema ipſorum arcuum, conſtituta ſint duo triangula *CMD*, *cmd*. Quoniam igitur arcus

(a) §. 137. (b) Syn. Alg. §. 259. (c) Lib. VII. § 82. (d) Syn. Alg. §. 266.

arcus *CXD*, *cxd* ſunt ſibi mutuo ſimiles, anguli *CMD*, *cmd* erunt æquales (a). Sunt autem latera circa illos proportionalia, habetur nempe *MC*. *MD* = *mc*. *md*; cum ſit *MC* = *MD*, *mc* = *md* (b). Ergo duo ipſa triangula *CMD*, *cmd* erunt ſimilia (c); ac proinde æquiangula (d), nimirùm æquales erunt anguli *MDC*. *mdc* * *MCD*, *mcd*. In triangulis autem ſimilibus homologa ſunt latera æqualibus angulis oppoſita (d), videlicet *MC*, *mc* * *CD*, *cd* * *DM*, *dm*, eademque eſt ratio omnium laterum homologorum in triangulis ſimilibus (e). Ergo erit *CD*. *cd* = *MC*. *mc*. Itaque chordæ arcuum ſimilium &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIV.

Latera homologa figurarum rectilinearum ſimilium circulis inſcriptarum, ſimilibus ipſorum arcubus ſubtenduntur.

I.

143 Circulis *ABC*, *abc* inſcripta ſint duo triangula ſimilia *ABC*, *abc*, quorum latera homologa ſint *AB*, *ab* * *BC*, *bc* * *CA*, *ca*. Dico, arcus *AB*, *ab* eſſe ſibi mutuo ſimiles, ſicuti etiam arcus *BC*, *bc*, necnon arcus *AC*, *ac*, quorum chordæ ſunt homologa ipſorum triangulorum latera. Fig. 3. Fig. 4. Tab. VI.

Demonſtratio.

Cum enim ob hypotheſim anguli *ACB*, *acb* æquales ſint inter ſe (f), iique inſiſtant arcubus *AB*, *ab*, arcus ipſi erunt ſibi mutuo ſimiles (g). Eandem ob cauſam ſimiles erunt arcus *BC*, *bc* ob æqualitatem angulorum *BAC*, *bac*, ſicuti etiam arcus *AC*, *ac*; cum anguli quoque *ABC*, *abc* ſint æquales. Ergo &c.

II.

(a) §. 136. (b) Lib. VII. §. 10. (c) §. 63. (d) §. 67. (e) §. 77. (f) §. 1. (g) §. 135.

Digitized by Google

II.

Fig. 5. Fig. 6. Tab. VI. 144 Inſcripta modo ſint circulis *ABD*, *abd* duŏ ſimilia pentagona *ABCDE*, *abcde*, quorum homologa latera ſint *AB*, *ab* * *BC*, *bc* * *CD*, *cd* * *DE*, *de* * *EA*, *ea*. Dico, hæc omnia ſimilibus ipſorum circulorum arcubus ſubtendi.

Demonſtratio.

Facta ipſorum pentagonorum reſolutione in triangula ſimilia *ACB*, *acb* * *ACE*, *ace* * *ECD*, *ecd* (a), ſimiles erunt arcus *AB*, *ab*, necnon arcus *BC*, *bc* (b); cum eorum chordæ ſint latera homologa triangulorum ſimilium *ACB*, *acb*. Eadem ratione ſimiles erunt arcus *AE*, *ae*, ſicuti etiam tum arcus *ED*, *ed*, tum arcus *CD*, *cd*. Ergo latera homologa &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Latera omnia figurarum rectilinearum regularium ejuſdem generis circulis inſcriptarum, ſimilibus eorumdem arcubus ſubtenduntur.

145 Omnes enim figuræ rectilineæ regulares ejuſdem generis ſunt ſibi mutuo ſimiles (c), & quodlibet latus unius eſt homologum cuilibet lateri alterius (d).

THEO-

(a) §. 120.
(b) §. 143.
(c) §. 3.
(d) §. 4.

THEOREMA XXV.

Si extra circulum ſumatur punctum, atque ab illo duæ recta lineæ in ipſum circulum ducantur, quarum altera illius peripheriam tangat, altera ſecet, erit tangens media proportionalis inter totam ſecantem, ejuſque partem, quæ inter datum punctum, ipſumque circulum continetur.

146 Extra circulum CBE ſumatur punctum A, a quo duæ rectæ lineæ AC, AD in ipſum circulum cadant, ea quidem lege, ut recta AC circulum ipſum tangat, recta vero AD ipſum ſecet. Dico, tangentem AC eſſe mediam proportionalem inter totam ſecantem AD, ejuſque ſegmentum AB, quod inter punctum A, & ipſum circulum reperitur. Fig. 1. Tab. VI.

Demonſtratio.

Jungantur puncta C, B recta CB, & puncta C, D recta CD, duoque propterea conſtituta ſint triangula ACB, ADC. Cum igitur angulus DAC ſit communis utrique triangulo ACB, ADC, & angulus ACB trianguli ACB ſit æqualis angulo CDB trianguli ADC (a), utpote, qui in alterna circuli portione conſiſtit, reliquus itidem angulus CBA trianguli ACB æqualis erit reliquo angulo ACD trianguli ADC (b); ac proinde duo ipſa triangula, utpote æquiangula, erunt ſibi mutuo ſimilia (c), habebuntque latera circa æquales angulos proportionalia (d), videlicet erit AD. AC = AC. AB. Igitur recta tangens AC eſt media proportionalis inter totam ſecantem AD, & ejus ſegmentum AB. Itaque ſi extra circulum &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) Lib. VII. §. 13. (b) Lib. V. § 46. (c) §. 66. (d) § 1.

COROLLARIUM.

Si ab eodem punčto extra circulum ſumto in ipſum circulum duæ rečtæ cadant, quarum altera circulum tangat, altera ſecet, quadratum tangentis erit æquale rectangulo contento ſub tota ſecante, ejuſque ſegmento, quod extra circulum reperitur.

147 Quadratum ſcilicet tangentis AC erit æquale rečtangulo contento ſub tota AD, ejuſque ſegmento AB. Id enim ex eo neceſſario ſequitur, quod tangens AC ſit media proportionalis inter totam AD, ejuſque ſegmentum AB (a).

Fig. 8. Tab. VI.

THEOREMA XXVI.

Si in circulo duæ rečtæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rečtangulum contentum ſub ſegmentis unius æquale erit rečtangulo ſub ſegmentis alterius comprehenſo.

Euclid. lib. 3. p. 35. Fig. 9. Tab. VI.

148 In circulo ADBC ſeſe mutuo ſecent duæ rečtæ lineæ AB, CD in punčto E. Dico, rečtangulum contentum ſub ſegmentis AE, EB rečtæ AB æquale eſſe rečtangulo, quod ſub ſegmentis DE, EC rečtæ CD continetur.

Demonſtratio.

Jungantur punčta A, D, ſicuti etiam punčta C, B rečtis AD, CB, duoque fiant triangula AED, CEB. Quoniam igitur duo anguli AED, CEB ſunt ad verticem oppoſiti, æquales erunt inter ſe (b). Æquales ſunt autem etiam duo DAB, DCB (c), utpote in eadem circuli portione conſiſtentes. Ergo reliquus itidem ADE reliquo EBC æqualis erit (d). Sunt igitur duo triangula AED, CEB inter ſe mutuo æquiangula; ac proinde ſimilia (e), habebuntque latera circa æquales angulos AED, CEB proportionalia

(a) §.112. (b) Lib.III. §.51. (c) Lib.VII. §.73. (d) Lib.V. §.46. (e) §.60.

lia (a), videlicet erit AE . ED = EC . EB . Quamobrem erit AE × EB = ED × EC (b). Si ergo in circulo &c quod erat oſtendendum.

LEMMA IV.

Circulus eſt polygonum regulare infinitorum laterum.

149 Res enim perſpecta eſt, polygonum regulare ad circulum continuo accedere, quo magis, manente eodem perimetro, ipſius polygoni latera multiplicantur, atque adeo exiliora fiunt, ut proinde ſi numero infinita ipſa fuerint, & infinitæ parvæ magnitudinis, hujuſmodi polygonum a circulo diſcerni minime queat. Ergo circulus conſiderari ac ſumi poteſt veluti polygonum regulare infinitorum laterum.

COROLLARIUM I.

Circuli catetus non differt ab illius radio.

150 Spectato nempe circulo, veluti polygono regulari infinitorum laterum, ipſius cateti diverſi non erunt ab illius radiis, niſi quantitate infinite parva, atque adeo nulla.

COROLLARIUM II.

Omnes circuli ſunt polygona regularia ejuſdem generis.

151 Omnes enim eodem laterum numero continentur.

COROLLARIUM III.

Circuli ſunt polygona ſibi mutuo ſimilia.

152 Quandoquidem ſunt polygona regularia ejuſdem generis (c), quæ omnia ſunt ſibi mutuo ſimilia (d).

(a) §.1. (b) §.107. (c) §.151. (d) §.3.

COROLLARIUM IV.

Omnes circuli ſunt ſibi mutuo ſimiles.

153 Sequitur ex præcedenti.

THEOREMA XXVII.

Peripheriæ duorum circulorum ſunt directe inter ſe, ut eorundem radii.

Fig. 10. Fig. 16. Tab. V. 154 Sint duo circuli *enf*, ENF, quorum radii ſint *mn*, MN. Dico, peripheriam *enf* eſſe ad peripheriam ENF, ut eſt radius *mn* ad radium MN.

Demonſtratio.

Circuli *enf*, ENF ſunt polygona regularia ejuſdem generis (a), quorum perimetri ſunt peripheriæ *enf*, ENF. Perimetri autem polygonorum regularium ejuſdem generis ſunt directe inter ſe, ut eorundem radii (b). Ergo peripheriæ quoque circulorum *enf*, ENF ſunt directe, ut radii *mn*, MN. Itaque peripheriæ circulorum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Peripheriæ circulorum ſunt, ut diametri.

155 Diametri namque circulorum ſunt, ut eorundem radii (c).

COROL-

(a) §.151. (b) §.133. (c) Lib.I. §.127.

COROLLARIUM II.

Arcus ſimiles duorum circulorum ſunt inter ſe, ut eorundem radii.

156 Etenim arcus ſimiles duorum circulorum ſunt directe inter ſe, ut ipſorum circulorum peripheriæ (a).

COROLLARIUM III.

Circuli elementa decreſcunt in ratione imminuti radii.

157 Elementa namque circuli EBD ſunt peripheriæ ſibi mutuo concentricæ EBD, FGH, MNO, PRS productæ a punctis rotantis radii AB (b). Eſt autem peripheria FGH ad peripheriam EBD, ut eſt radius, ſive ſegmentum AF radii AB ad totum ipſum radium AB (c). Similiter peripheria MNO eſt ad peripheriam EBD, ut eſt ſegmentum AM radii AB ad ipſum radium AB, atque ita deinceps. Ergo &c. Fig. 7. Tab. VI.

COROLLARIUM IV.

Circulorum diametri, & ſemidiametri ſunt inter ſe, ut eorundem peripheriæ, & arcus ſimiles.

158 Cum enim peripheriæ, & arcus ſimiles duorum circulorum ſint inter ſe, ut eorundem diametri, & ſemidiametri, erunt quoque diametri, & ſemidiametri duorum circulorum, ut ipſorum peripheriæ, & arcus ſimiles.

(a) §.7. (b) §.48. (c) §.154.

THEOREMA XXVIII.

Perimetri duarum figurarum rectilinearum ſimilium circulis inſcriptarum ſunt directe inter ſe, ut ipſorum circulorum radii.

159 Circulis ACD, *acd* inſcripta ſint duo pentagona ſimilia ABCDE, *abcde*, quorum homologa latera ſint AE, *ae*; radii vero circulorum rectæ FE, *fe*. Dico, perimetrum ABCDE eſſe ad perimetrum *abcde*, ut eſt radius FE ad radium *fe*.

Fig. 5. Fig. 6. Tab. VI.

Demonſtratio.

Cum enim latera AE, *ae* ſint homologa, ſimiles erunt arcus AE, *ae* (a); eritque propterea latus AE ad latus *ae*, ut eſt radius FE ad radium *fe* (b). Eſt autem perimeter ABCDE ad perimetrum *abcde*, ut latus AE ad latus *ae* (c). Ergo perimeter quoque ABCDE erit ad perimetrum *abcde*, ut radius FE ad radium *fe* (d). Itaque perimetri &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Perimetri duarum figurarum rectilinearum ſimilium circuli inſcriptarum ſunt inter ſe, ut ipſorum circulorum peripheriæ.

160 Peripheriæ namque duorum circulorum ſunt directe inter ſe, ut eorundem radii (e).

THEO-

(a) §.144.
(b) §.142.
(c) §.131.
(d) Lib.I. §.78.
(e) §.154.

THEOREMA XXIX.

In eodem, vel æqualibus circulis ſectores ſunt inter ſe, ut arcus, quibus inſiſtunt; eſtque inſuper eorum quilibet ad totum circulum, ut ipſius arcus ad totam peripheriam.

I.

161 In circulo EBD duo ſpectentur ſectores BAC, CAD. Dico, ſectorem BAC eſſe ad ſectorem CAD, ut eſt arcus BC ad arcum CD. Fig. 7. Tab. VI.

Demonſtratio.

Arcus BC, FG, MN, PR ſint elementa ſectoris BAC, & arcus CD, GH, NO, RS elementa ſectoris CAD. Cum igitur arcus BC, FG, MN, PR ſint ſibi mutuo ſimiles, quemadmodum etiam arcus CD, GH, NO, RS (a), erit tam arcus BC ad arcum FG, quam arcus CD ad arcum GH, ut radius AC ad radium AG (b); ac proinde habebitur BC ad FG, ut CD ad GH (c), & *alternando* FG ad GH, ut BC ad CD (d). Eodem modo oſtendam, eſſe tam MN ad NO, quam PR ad RS, ut eſt BC ad CD. Itaque aggregatum ex omnibus arcubus BC, FG, MN, PR, ſive ſector BAC, erit ad aggregatum ex omnibus arcubus CD, GH, NO, RS, ſeu ad ſectorem CAD, ut unus antecedentium BC ad unum conſequentium CD (e); adeoque &c.

II.

162 Dico ſecundo, ſectorem BAC eſſe ad totum circulum EBD, ut eſt arcus BC ad totam peripheriam EBD.

Demon-

(a) §. 138. (b) §. 156. (c) Lib. I. §. 76. (d) Ibid. §. 125. (e) Ibid. §. 144.

Demonſtratio.

Peripheriæ concentricæ EBD, XFH, YMO, ZPS ſint elementa circuli EBD, arcus vero BC, FG, MN, PR elementa ſectoris BAC. Quoniam ergo arcus BC, FG, MN, PR ſunt ſimiles (a), eandem omnes rationem habebunt ad integram ſui circuli peripheriam (b). Quamobrem ut arcus BC ad peripheriam EBD, ita omnes ſimul arcus BC, FG, MN, PR, ſive ſector BAC, ad omnes ſimul peripherias EBD, XFH, YMO, ZPS, ſive ad integrum circulum EBD (c). In eodem ergo, vel æqualibus circulis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Sectores ejuſdem, vel æqualium circulorum ſunt inter ſe, ut ipſorum ſectorum anguli, & viciſſim anguli, ut ſectores.

163 Sector nimirum BAC eam habet rationem ad ſectorem CAD, quam habet angulus BAC ad angulum CAD, & viciſſim angulus BAC eſt ad angulum CAD, ut ſector BAC ad ſectorem CAD. Anguli namque BAC, CAD ſunt directe inter ſe, ut arcus BC, CD, quibus inſiſtunt (d).
Fig. 7. Tab. VI. Sectores autem BAC, CAD ſunt ut arcus BC, CD (e). Ergo erunt etiam, ut anguli BAC, CAD (f). Viciſſim cum ſectores BAC, CAD ſint, ut arcus BC, CD, quemadmodum anguli BAC, CAD ſunt, ut arcus BC, CD; quibus inſiſtunt (g), ita ipſi anguli erunt etiam, ut ſectores BAC, CAD (h).

COROL-

(a) §.338. (b) §.7. (c) Lib.I.§.144. (d) Lib.VII.§.27. (e) §.161. (f) Lib.I.§.78. (g) Lib.VII.§.27. (h) Lib.I.§.78.

COROLLARIUM II.

Si recta linea dividatur in partes æquales, atque ex puncto extra illam ſumto ducantur ad ſingula puncta diviſionis rectæ lineæ, quarum una ſit data recta perpendicularis, rectæ illæ lineæ, quo remotiores erunt a recta perpendiculari, eo minores angulos comprehendent.

164 Diviſa nimirum recta BE in partes æquales BC, CD, DE, ductiſque ex puncto A extra illam ſumto rectis AB, AC, AD, AE, quarum AB ſit ipſi BE perpendicularis, angulus CAD minor erit angulo BAC, & angulus DAE minor angulo CAD, atque ita deinceps. Etenim deſcripto ex centro A, intervallo AC arcu FCG, & recta AB directe producta in F, angulus BAC erit ad angulum CAD, ut ſector FAC ad ſectorem CAG (a). Sector autem FAC major eſt ſectore CAG; cum ſector FAC ſit major triangulo BAC (b), adeoque etiam triangulo CAD ipſi BAC æquali (c), ſitque ſector CAG minor triangulo CAD (c). Ergo angulus quoque BAC major erit angulo CAD (d). Eodem modo oſtendam, angulum CAD majorem eſſe angulo DAE. Quandoquidem deſcripto ex puncto A intervallo AD arcu MN, rectaque AC producta in M, ſicuti evidens eſt, ſectorem MAD majorem eſſe ſectore DAN, ita manifeſtum efficitur, angulum CAD majorem eſſe angulo DAE. Hinc Fig. 21. Tab. V.

COROLLARIUM III.

165 Si anguli BAC, CAD, DAE eſſent æquales inter ſe, ſegmentum BC minus eſſet ſegmento CD, & ſegmentum CD ſegmento DE.

THEO-

(a) §. 163. (b) Syn. Alg § 257. (c) §. 93. (d) Syn. Alg. §. 257. (e) Lib. I. §. 45.

THEOREMA XXX.

Triangula plana rectilinea ſimilia ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum homologorum.

Euclid. lib. 6. p. 19. Fig. 11. Fig. 12. Tab. VI.

166 Sint duo triangula plana rectilinea ſimilia ABC, *abc*, quorum baſes BC, *bc* ſint latera ipſorum homologa, altitudines vero rectæ AE, *ae*. Dico triangulum ABC eſſe ad triangulum *abc* in ratione *duplicata* lateris BC ad latus *bc*.

Demonſtratio.

Triangula ABC, *abc* ſunt inter ſe in ratione compoſita ex ratione baſium BC, *bc*, & altitudinum AE, *ae* (a). Ratio autem altitudinum AE, *ae* diverſa non eſt a ratione baſium BC, *bc* (b). Ergo triangula ABC, *abc* ſunt in ratione compoſita ex ratione baſium BC, *bc* ducta in ſeipſam. Hæc autem ratio eſt *duplicata* ipſarum baſium, ſive laterum homologorum BC, *bc* (c). Ergo triangula ABC, *abc* ſunt inter ſe in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum BC, *bc*. Triangula itaque plana &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Triangula plana rectilinea ſimilia, quorum baſes ſint latera ipſorum homologa, ſunt in ratione duplicata ſuarum altitudinum.

167 Sunt enim altitudines, ut duo quælibet homologa ipſorum triangulorum latera (d).

COROL-

(a) §. 106. (b) § 78. (c) Lib. I. §. 55. (d) § 78.

COROLLARIUM II.

Omnia triangula regularia ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum.

168 Omnia enim triangula regularia ſunt ſimilia (a), & quodlibet latus unius eſt homologum cuilibet lateri alterius (b).

COROLLARIUM III.

Altitudines triangulorum ſimilium, quorum baſes ſint latera ipſorum homologa, ſicuti etiam duo qualibet homologa eorundem latera, ſunt in ratione ipſorum triangulorum ſubduplicata.

169 Sunt enim in ea ratione, ex qua ducta in ſeipſam ratio ipſorum triangulorum efficitur (c). Hæc autem eſt ratio ipſorum triangulorum *ſubduplicata* (d). Ergo &c.

THEOREMA XXXI.

Quadrilatera ſimilia ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum homologorum.

170 Sint duo quadrilatera ſimilia ADBC, *adbc*, quorum latera homologa ſint BC, *bc*. Dico, quadrilatera ADBC, *adbc* eſſe in ratione ipſorum laterum BC, *bc duplicata*. Euclid. lib. 6. p. 20. Fig. 11. Fig. 12. Tab. VI.

Demonſtratio.

Ductis rectis AB, *ab*, ſimilia ſint duo triangula ABD, *abd*, ſicuti etiam duo ABC, *abc* (e), rectæ vero AB, *ab* ſint latera homologa tum triangulornm ABD, *abd* tum triangulorum ABC, *abc* (f), utpote oppoſita æqualibus eorundem

(a) §. 3.
(b) §. 4.
(c) §. 166.
(d) Lib. I. §. 59.
(e) §. 119.
(f) §. 67.

dem angulis BDA, *bda* * BCA, *bca*. Igitur tam duo triangula ABC, *abc*, quam duo ABD, *abd* erunt in *duplicata* ratione laterum AB, *ab* (a); ac proinde ratio trianguli ABC ad triangulum *abc* diverſa ab ea non erit, quam habet triangulum ABD ad triangulum *abd*. Poſitis autem pluribus magnitudinibus proportionalibus, conſtat, omnes antecedentes eſſe ad omnes conſequentes, ut eſt una antecedentium ad unam conſequentium (b). Ergo quadrilaterum ADBC erit ad quadrilaterum *adbc*, ut triangulum ABC ad triangulum *abc*. Triangulum autem ABC eſt ad triangulum *abc* in ratione *duplicata* lateris BC ad latus ſibi homologum *bc* (c). Ergo quadrilaterum quoque ADBC erit ad quadrilaterum *adbc* in ratione *duplicata* homologorum laterum BC, *bc*. Quadrilatera igitur ſimilia &c. quod erat &c.

COROLLARIUM I.

Quadrilatera ſimilia habent duo qualibet homologa latera in ratione ipſorum ſubduplicata.

171 Ex ratione enim laterum homologorum ducta in ſeipſam oritur ratio, quam habent ipſa quadrilatera (d). Ergo latera homologa ſunt in ratione ipſorum *ſubduplicata* (e).

COROLLARIUM II.

Omnia quadrata ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum.

172 Omnia ſiquidem quadrata ſunt quadrilatera ſimilia (f), & quidem hujuſmodi, ut quodlibet latus unius ſit homologum cuilibet lateri alterius (g).

COROLLARIUM III.

Latera quadratorum ſunt in ratione ipſorum ſubduplicata.

173 Sequitur ex praecedenti, ut ex *Coroll. I.* eſt manifeſtum.

THEO-

(a) §. 166. (b) Lib. I. §. 144 (c) §. 166. (d) §. 170. (e) Lib. I. §. 59. (f) §. 2. (g) §. 4.

THEOREMA XXXII.

Polygona ſimilia ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum homologorum.

174 Sint duo pentagona ſimilia *ABCDE*, *abcde*, quorum latera homologa ſint *AB*, *ab* * *BC*, *bc* * *CD*, *cd* * *DE*, *de* * *EA*, *ea*. Dico, pentagonum *ABCDE* eſſe ad pentagonum *abcde* in ratione *duplicata* laterum homologorum *CD*, *cd*. Euclid. lib. 6. p. 20. Fig. 18. Fig 19. Tab. V.

Demonſtratio.

Reſolvatur utrumque pentagonum in triangula ſimilia *CMD*, *cmd* * *DME*, *dme* * *EMA*, *ema* * *AMB*, *amb* * *BMC*, *bmc* (a). Cum igitur duo triangula ſimilia ſint in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum (b), triangula *CMD*, *cmd* erunt in ratione *duplicata* laterum *CD*, *cd*, triangula *DME*, *dme* in ratione *duplicata* laterum *DE*, *de*, triangula *EMA*, *ema* in ratione *duplicata* laterum *EA*, *ea*, triangula *AMB*, *amb* in ratione laterum *AB*, *ab*, & triangula *BMC*, *bmc* in ratione laterum *BC*, *bc duplicata*; ſunt enim hæc omnia latera ipſorum homologa *reſpective* (c). Eadem eſt autem ratio omnium laterum homologorum polygonorum ſimilium (d). Ergo erit $CMD . cmd = DME . dme = EMA . ema = AMB . amb = BMC . bmc$, ac proinde $CMD + DME + EMA + AMB + BMC . cmd + dme + ema + amb + bmc = CMD . cmd$ (e), ſive pentagonum *ABCDE* ad pentagonum *abcde*, ut triangulum *CMD* ad triangulum *cmd*. Sunt autem hujuſmodi triangula in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum *CD*, *cd* (f). Ergo in eadem quoque ratione erit pentagonum *ABCDE* ad pentagonum *abcde*. Itaque polygona &c. quod erat oſtendendum.

(a) §. 120. (b) §. 166. (c) §. 67. (d) §. 77. (e) Lib. I. §. 144. (f) §. 166.

COROLLARIUM I.

Latera homologa polygonorum ſimilium ſunt in ratione ipſorum polygonorum ſubduplicata.

175 Ratio namque ipſorum laterum hujuſmodi eſt, ut ex illa in ſe ducta ratio ipſorum polygonorum conſurgat (a).

COROLLARIUM II.

Polygona regularia ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum.

176 Hujuſmodi namque polygona ſunt ſibi mutuo ſimilia (b), & quodlibet latus unius eſt homologum cuilibet lateri alterius (c).

COROLLARIUM III.

Polygona regularia ejuſdem generis ſunt in ratione duplicata ſuorum radiorum, & catetorum.

Fig. 18. Fig. 19. Tab. V. 177 Pentagona ſcilicet regularia ABCDE, *abcde* ſunt in ratione *duplicata* tum radiorum MC, *mc*, tum catetorum MN, *mn*. Sunt enim tam radii MC, *mc*, quam cateti MN, *mn*, ut duo ipſorum pentagonorum latera CD, *cd* (d).

COROLLARIUM IV.

Polygona regularia ejuſdem generis ſunt, ut quadrata ſuorum radiorum, & catetorum.

178 Quandoquidem hujuſmodi quadrata ſunt inter ſe, quemadmodum ipſa polygona, in ratione *duplicata* eorundem radiorum, & catetorum (e).

COROL-

(a) §. 174. (b) §. 3. (c) §. 4. (d) §. 128. 129. (e) §. 172.

COROLLARIUM V.

Latera, radii, & cateti polygonorum regularium ejuſdem generis ſunt reſpective inter ſe in ratione ipſorum polygonorum ſubduplicata.

179 Sequitur ex præcedentibus, ut patet ex §. 59. Lib. I.

COROLLARIUM VI.

Omnia plana rectilinea ſimilia ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum homologorum.

180 Demonſtravimus enim, omnia triangula (a), omnia quadrilatera (b), & omnia polygona ſimilia (c), eſſe *reſpective* inter ſe in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum.

COROLLARIUM VII.

Omnia plana rectilinea ſimilia ſunt inter ſe, ut quadrata ſuorum laterum homologorum.

181 Sunt enim hujuſmodi quadrata in ratione *duplicata* laterum, quorum ſunt quadrata (d).

COROLLARIUM VIII.

Latera homologa planorum ſimilium ſunt in ratione ipſorum ſubduplicata.

182 Non enim plana ſimilia poſſunt eſſe in ratione *duplicata* laterum homologorum, quin latera ſint in ratione ipſorum planorum *ſubduplicata* (e).

COROL-

(a) §. 166. (b) §. 170. (c) §. 174. (d) § 172. (e) Lib. I. §. 59.

Digitized by Google

COROLLARIUM IX.

Si fuerint tres rectæ lineæ continuo proportionales, figura rectilinea deſcripta ſuper primam erit ad figuram ſimilem ſimiliterque deſcriptam ſuper ſecundam, ut illarum prima ad tertiam.

183 Ut ſi tres rectæ BC, *bc*, F fuerint continuo proportionales, triangulum ABC deſcriptum ſuper primam BC erit ad triangulum *abc* ſimile ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam *bc*, ut prima BC ad tertiam F. Cum enim rectæ BC, *bc* ſint hoc ipſo latera homologa planorum ABC, *abc*, planum ABC erit ad planum *abc* in ratione *duplicata* laterum BC, *bc* (a). Eſt autem BC ad F in ratione *duplicata* ipſius BC ad *bc* (b). Ergo &c.

Fig. 11. Fig. 12. Tab. VI.

COROLLARIUM X.

Figura rectilinea deſcripta ſuper hypotenuſam trianguli rectanguli adæquat figuras ſimiles ſimiliterque deſcriptas, ſuper ejuſdem latera.

184 Si nimirum ſuper latera AB, BC, CA trianguli rectanguli BAC ſimiliter deſcribantur tria ſimilia triangula BEA, BFC, CDA, triangulum BFC hypotenuſæ BC æquale erit triangulis BEA, CDA laterum AB, AC. Cum enim hujuſmodi triangula ſint inter ſe, ut quadrata BH, BN, CK (c), ſicuti quadratum BN eſt æquale quadratis BH, CK (d), ita triangulis BEA, CDA æquale erit triangulum BFC.

Euclid. lib. 6. p. 31. Fig. 10. Tab. VI.

THEOREMA XXIII.

Circuli ſunt inter ſe in ratione duplicata ſuorum radiorum.

185 Sint duo circuli *enf*, ENF, quorum radii ſint rectæ

(a) §. 180. (b) Lib. I. §. 177. (c) §. 181. (d) Lib. VI. §. 37.

ctæ *mn* ; MN : Dico ; circulum *enf* eſſe ad circulum ENF in ratione *duplicata* radii *mn* ad radium MN.

Demonſtratio.

Circuli ſunt polygona regularia ejuſdem generis (a). Hæc autem ſunt in ratione *duplicata* ſuorum radiorum (b). Ergo in eadem quoque ratione erunt circuli. Itaque circuli &c. quod erat oſtendendum. Fig. 10. Fig. 15. Tab. V.

COROLLARIUM I.

Circuli ſunt in ratione duplicata ſuarum diametrorum.

186 Circulorum namque diametri ſunt inter ſe, ut eorundem ſemidiametri (c). Euclid. lib. 12. prop. 2.

COROLLARIUM II.

Semicirculi, & ſectores ſimiles ſunt reſpective inter ſe in ratione duplicata diametrorum, & ſemidiametrorum ſuorum circulorum.

187 Etenim ſemicirculi, & ſectores ſimiles ſunt inter ſe, ut ipſi circuli (d).

COROLLARIUM III.

Circuli, ſemicirculi, & ſectores ſimiles ſunt reſpective, ut quadrata ſuarum diametrorum, & ſemidiametrorum.

188 Videlicet circuli *enf*, ENF ſunt, ut quadrata *abcd*, ABCD ſuarum diametrorum *ef*, EF. Sunt enim hujuſmodi quadrata in ratione ipſarum diametrorum *duplicata* (e). Idipſum dicito de quadratis radiorum, quodque de circulis dictum eſt, de ſemicirculis, & ſectoribus ſimilibus itidem intelligatur. Fig. 10. Fig. 16. Tab. V.

COROL-

(a) §. 149. (b) §. 177. (c) Lib. I. §. 127. (d) § 11. (e) §. 172.

COROLLARIUM IV.

Si fuerint tres rectæ lineæ continuo proportionales, circulus deſcriptus circa primam eſt ad circulum deſcriptum circa ſecundam, ut prima ad tertiam.

189 Demonſtratur eodem modo, quo idipſum oſtenſum eſt §. 183. de figuris rectilineis ſimilibus.

SCHOLION.

190 Id quoque intelligendum eſt de ſemicirculis, & ſectoribus ſimilibus.

COROLLARIUM V.

In omni triangulo rectangulo circulus hypotenuſæ eſt æqualis circulis laterum ſimul ſumtis.

191 Coincidit cum demonſtratione tradita §. 184. hujus. Sunt enim circuli, ut quadrata diametrorum, ſive laterum trianguli rectanguli, circa quæ deſcribuntur (a).

COROLLARIUM VI.

Circulorum diametri, & ſemidiametri ſunt in ratione ſubduplicata ipſorum circulorum.

192 Ex ratione ſiquidem diametrorum, ſicuti etiam ſemidiametrorum in ſe ducta ratio ipſorum circulorum conſurgit (b). Ergo ratio diametrorum, & ſemidiametrorum eſt ratio ipſorum circulorum *ſubduplicata* (c).

ELE-

(a) §. 188. (b) §. 185. (c) Lib. I. §. 59.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER X.

De planorum dimenſione.

PLanorum ſimilium ſymptomatis demonſtratis, totius *planometriæ* fundamenta hic exhibemus. *Planometria* porro dicitur ea Geometriæ pars, in qua de *planorum dimenſione* differitur, modusque traditur, quo area figuræ planæ cujusvis generis dignoſci poteſt.

DEFINITIO I.

1 *MAgnitudinem dimetiri non aliud eſt, quam invenire; quoties una magnitudo alteram noti valoris contineat*: Sic data linea dicitur eſſe *decem palmorum*, quatenus, ſi lineæ palmaris longitudinis comparetur, *decies* illam continere deprehendimus.

COROLLARIUM.

2 In omni ergo dimenſione id unum requiritur, *ut quantitas noti valoris habeatur, unitatis inſtar aſſumenda, eique comparanda, cujus quantitatem determinare volumus.*

DEFINITIO II.

3 *Menſura eſt quantitas noti valoris, quæ in dimenſione aſſumitur, quæque propterea aliquoties ſumta magnitudinem, quam per ipſam metimur, adæquat.*

COROLLARIUM I.

4 Hinc *menſura debet eſſe magnitudo ejuſdem generis cum illa; quam per ipſam dimetimur*. Quæ namque diverſi generis ſunt, non ita ſe habent, ut valor unius per alterius valorem dignoſci poſſit; cum ex una aliquoties ſumta altera haudquaquam conſurgat.

COROLLARIUM II.

5 *Quamobrem menſura linearum erit linea; menſura ſuperficierum erit ſuperficies; & menſura ſolidorum erit ſolidum*. Linea namque, ſuperficies, & corpus ſunt magnitudines diverſi generis. Quoniam vero ex menſura linearum determinatur menſura ſuperficierum, & hinc menſura ſolidorum, menſuras, quæ in linearum quantitate definienda apud Geometras in uſu ſunt, hic ſubjiciam.

Menſuræ lineares.

6 Linearum menſuræ ſunt *digitus*, *uncia*, ſive *pollex*, *palmus*, *pes*, *hexapeda*, *decempeda*, *paſſus*, *ſtadium*, *& milliare*.

Digitus.

7 *Digitus* eſt menſura conſurgens ex quatuor granis hordeaceis deinceps ſecundum longitudinem poſitis, ſimulque unitis, ſeu eſt longitudo quater continens longitudinem grani hordeacei.

Palmus.

8 *Palmus* eſt menſura conſurgens ex quatuor digitis; nempe talis longitudo, ut quatuor digitorum longitudinem adæquet.

Pes,

Pes, Pollex, & Linea.

9 *Pes* eſt menſura quatuor palmos complectens. Hic dividitur in duodecim partes æquales, quæ *unciæ*, ſive *pollices* vocantur. *Uncia* quoque dividitur in duodecim partes æquales, quæ dicuntur *lineæ*. Unde *uncia*, ſeu *pollex* eſt pars duodecima *pedis*; & *linea* pars duodecima *unciæ*.

SCHOLION.

10 Longitudo *pedis* eadem non eſt apud omnes nationes, ſed plane diverſa. Quamobrem admiſſa diviſione *pedis Regii Pariſienſis* in duodecim *digitos*, *digiti* in duodecim *lineas*, *lineæ* in decem *particulas*, atque adeo *pedis Regii Pariſienſis* in particulas 1440., quantitas *pedum*, qui apud diverſas nationes in uſu ſunt, ſi ad *pedem Regium Pariſienſem* referantur, ea eſt, quam ſubjectum laterculum oſtendit.

Pes Regius Pariſienſis	1440.	Danicus	1404.
Romanus Capitolii	1306.	Svecicus	1320.
Venetus	1540.	Ulna Bononienſis	2640.
Bononienſis	1682.	Ulna Florentina	2430.
Londinenſis	1350.	Palmus Romanus	990. (a).

Hexapeda, & Decempeda.

11 *Hexapeda* eſt menſura *ſex pedes* complectens, eaque non videtur diverſa ab *orgyia* Græcorum. *Decempeda* vero eſt menſura, quæ *decem pedibus* definitur.

Paſſus, Stadium, & Milliare.

12 *Paſſus Geometricus* ex quinque *pedibus* componitur; ex tribus vero, quem *Gallicum* vocant. *Stadium* continet paſſus 125. *Milliare* vero octo *ſtadia*, ſive *mille paſſus* comprehendit.

(a) Videatur Ricciolus lib. 2. *Geographiæ*, Snellius in *Eratoſtene Batavo* lib. 2., Eiſenſchmidius in nova Diſq. de *pond.* & *menſuris* ſect. 3., necnon Hiſt. Acad. Regiæ ad annum 1718.

SCHOLION.

13 Ceterum ſicuti eadem ubique non eſt *pedis* magnitudo, eadem quoque apud omnes non erit *paſſus*, *pollicis*, *lineæ*, *ſtadii*, atque *milliarii* quantitas: quod valide notandum eſt, ut diſſidentes hac in re opiniones componantur.

DEFINITIO III.

14 *Digitus, palmus, pollex, & pes quadrati ſunt quadrata, quorum latus adæquat longitudinem unius digiti, palmi, pollicis, vel pedis.* Si nimirum latus quadrati fuerit digitalis longitudinis, quadratum dicitur *digitus quadratus*; ſi pedalis, dicitur *pes quadratus*, atque ita de ceteris.

HYPOTHESIS I.

15 Cum menſura ſuperficiei ſit ſuperficies, area cujuslibet figuræ planæ determinatur per numerum *digitorum, palmorum, pollicum*, vel *pedum quadratorum*, quos ipſius figuræ area comprehendit.

DEFINITIO IV.

16 *Area figuræ planæ dicitur nota, cum innoteſcit numerus digitorum, palmorum, pollicum, vel pedum quadratorum, quos* Fig. 13. Tab. VI. *area ipſa adæquat.* Sic nota erit area quadrilateri ABCD, ſi notum nobis fuerit, quot *pollices*, *digiti*, *palmi*, aut *pedes quadrati* in illa contineantur.

HYPOTHESIS II.

17 Ut determinetur area figuræ planæ a rectangulo diverſæ, figura ipſa ad rectangulum revocanda eſt, nempe rectangulum conſtitui debet, cujus area ipſius figuræ aream adæquet. Nullius enim figuræ facilius, quam rectanguli, ut patebit, area definitur.

THEO-

THEOREMA I.

Area parallelogrammi æqualis eſt producto, quod ſit ex ductu baſis in illius altitudinem.

18 Eſto parallelogrammum ABCD, cujus baſis ſit recta BC, altitudo vero recta DE. Dico, illius aream æqualem eſſe producto, quod fit ex ductu baſis BC in altitudinem DE. Fig. 14. Tab. VI.

Demonſtratio.

Patet ex ipſa geneſi parallelogrammi. Oritur enim ex parallela elevatione baſis BC, quam elevationem metitur altitudo DE (a), atque adeo ex ductu baſis BC in ipſam altitudinem. Area itaque &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Area rectanguli adæquat productum, quod efficitur multiplicatione laterum, quæ ſunt circa unum angulum rectum.

19 Area nimirum rectanguli ABCD adæquat factum ex ductu lateris BC in latus AB, quæ ſunt circa angulum rectum ABC. Hac enim ſtante hypotheſi, latus BC ſpectari poteſt, ut baſis, & latus AB, ut altitudo ipſius rectanguli (b). Fig. 13. Tab. VI.

COROLLARIUM II.

Area cujuslibet quadrati adæquat productum, quod oritur ex ductu unius lateris in ſeipſum.

20 Omne enim quadratum eſt parallelogrammum (c), & quidem rectangulum (d), habens omnia latera inter ſe æqualia (e).

PRO-

(a) Lib. IX. §. 41.
(b) Lib. V. §. 12. & 14.
(c) Lib. VI §. 30.
(d) Ibidem §. 14. & 9.
(e) Ibid. § 2.

PROBLEMA I.

Aream parallelogrammi determinare.

Fig. 14. Tab. VI. 21 Eſto parallelogrammum ABCD, cujus baſis ſit recta BC, & altitudo recta DE. Invenire oporteat illius aream.

Reſolutio.

Ponatur BC $= a$, & DE $= b$. Ducantur itaque in ſe mutuo valores hujuſmodi. Factum ab erit valor areæ quæſitus.

Demonſtratio.

Patet ex §. 18.

SCHOLION.

22 Si partes, in quas diviſa ponitur altitudo parallelogrāmi non ſint æquales partibus, in quas ponitur diviſa ipſius baſis, quantitas areæ ipſius parallelogrammi determinanda non eſt per quadrata, ſed per rectangula oblonga. Fig. 13. Tab. VI. Ut ſi partes BE, EF, FG, GC baſis BC parallelogrammi ABCD fuerint *pedalis* longitudinis; *palmaris* vero partes CH, HK, KD altitudinis DC, facta multiplicatione, area parallelogrammi ABCD *duodecim* rectangula oblonga comprehendet, quorum ſingulorum baſis *unum pedem*, altitudo vero *unum palmum* æquabit. Hinc ut palam fiat, quot lateres ad cubiculi ſuperficiem tegendam requiruntur, neceſſe eſt, ut in una linea ſecundum longitudinem, in altera vero, angulum rectum cum illa conſtituente, niſi quadrati fuerint, ſecundum latitudinem diſponantur.

THEOREMA II.

Area trianguli plani rectilinei eſt æqualis producto; quod fit multiplicando dimidiam illius baſim per ejuſdem altitudinem, vel integram baſim per dimidiam altitudinem.

I.

23 Eſto triangulum planum rectilineum ABC, cujus baſis

ſis ſit recta BC, altitudo recta AD. Dico primo, illius aream æqualem eſſe producto, quod ſit multiplicando medietatem B*d* baſis BC per totam altitudinem AD. Fig 15. Tab.VI.

Demonſtratio.

Super baſim B*d*, & ſub eadem altitudine AD, nempe *ed* conſtitutum habeatur parallelogrammum *fBde*. Erit triangulum ABC æquale parallelogrammo *fBde* (a). Area autem parallelogrammi *fBde* eſt æqualis producto, quod ſit ex ductu baſis B*d* in altitudinem *ed*, ſive AD (b). Ergo eidem producto æqualis erit area trianguli ABC (c).

II.

24 Dico ſecundo, aream trianguli ABC æquare productum ex ductu baſis BC in medietatem D*a* altitudinis AD.

Demonſtratio.

Conſtituto parallelogrammo *aDcb*, cujus baſis *Dc* ſit æqualis baſi BC dati trianguli, & altitudo *bc* medietati *a*D altitudinis AD, area trianguli ABC æqualis erit areæ parallelogrammi *aDcb* (d). Eſt autem area *aDcb* æqualis facto ex ductu baſis *Dc*, ſive BC, in altitudinem *bc*, ſeu *a*D (e). Ergo eidem producto area quoque trianguli ABC æqualis erit (f). Area igitur trianguli &c. quod erat oſtendendum.

PROBLEMA II.

Aream trianguli plani rectilinei invenire.

25 Determinare oporteat aream trianguli plani rectilinei ABC.

Reſo-

(a) Lib IX.§.97. (b) §.18. (c) Syn.Alg.§.262. (d) Lib.IX.§.102. (e) §.18. (f) Syn.Alg.§.263.

Reſolutio.

Multiplicetur valor dimidiæ baſis BC per valorem altitudinis AD, vel valor dimidiæ altitudinis per valorem baſis. Factum erit area trianguli ABC quæſita. Ut ſi medietas baſis BC ponatur $= a$, & altitudo AD $= b$, valor areæ erit $= ab$. Similiter ſi valor totius baſis ſit $= d$, & valor dimidiæ altitudinis ſit $= x$, valor areæ erit $= dx$.

Fig. 15. Tab. VI.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt quoad utramque partem ex §. 23. & 24.

SCHOLION.

26 Cum triangulum quodcumque ſit medietas parallelogrammi ejuſdem, vel æqualis baſis, & altitudinis (a), area trianguli habebitur, ſi factum ex ductu baſis in altitudinem biſariam dividatur. Ut ſi baſis BC trianguli ABC ponatur $= a$, & altitudo AD $= b$, area ipſius trianguli erit $= \frac{ab}{2}$.

PROBLEMA III.

Aream trapezii invenire.

27 Invenire oporteat aream trapezii ADBC.

Reſolutio.

Ducta diagonali AB, diviſoque proinde trapezio in duo triangula ABD, ABC; inveniatur valor areæ utriuſque trianguli ABD, ABC (b). Tum valores hujuſmodi ſimul colligantur. Hæc ſumma erit area quæſita ipſius trapezii ADBC.

Fig. 11. Tab. VI.

Demon-

(a) Lib. IX. §. 40. (b) §. 25.

Demonſtratio.

Area namque trapezii ADBC adæquat areas duorum triangulorum ABD, ABC ſimul ſumtas (a).

PROBLEMA IV.

Aream polygoni invenire.

28 Datum ſit pentagonum ABCDE, cujus aream invenire oporteat.

Reſolutio.

Sumto in illius area puncto *a*, ducantur ad apices ſingulorum angulorum ipſius pentagoni rectæ *a* A, *a* B, *a* C, *a* D, *a* E, ut proinde diviſum ſit ipſum pentagonum in quinque triangula rectilinea. Horum deinde ſingulorum triangulorum area, methodo ſuperius tradita (b), inveniatur. Summa ex hiſce valoribus conſurgens erit valor areæ dati pentagoni ABCDE. Fig. 16. Tab. VI.

Demonſtratio.

Area ſiquidem pentagoni ABCDE adæquat areas omnium illorum triangulorum ſimul ſumtas (c).

THEOREMA III.

Area cujuslibet polygoni regularis æqualis eſt triangulo rectangulo, cujus alterum latus eorum, quæ ſunt circa angulum rectum, ſit æquale catheto ipſius polygoni, alterum ejuſdem perimetro.

29 Eſto hexagonum regulare ABCE, ex cujus centro *a* in latus CD cadat catetus *ad*. Ducta autem recta *df* perimetro ipſius hexagoni æquali, conſtituatur triangulum rectangulum *adf*. Dico, aream hexagoni ABE æquare aream trianguli *adf*. Fig. 17. Tab. VI.

H h *Demon-*

(a) Syn. Alg. §. 256. (b) §. 25. (c) Syn. Alg. §. 256.

Demonſtratio.

Ductis namque a centro *a* ad apices ſingulorum angulorum ipſius hexagoni rectis *a*A, *a*B, *a*C, *a*D, *a*E, *a*F, diviſum erit totum hexagonum in ſex triangula iſoſcelia æqualia (a); cumque recta *ad* ad perpendiculum lateri CD incumbat (b), ſi fiat ſegmentum *de* æquale lateri CD, conſtituaturque triangulum *dae*, erit triangulum *dae* æquale triangulo C*a*D (c); ac proinde ſingulis triangulis B*a*C, A*a*B, F*a*A, E*a*F, D*a*E (d), cum ſingula hujuſmodi triangula ſint triangulo C*a*D æqualia. Eſt autem baſis *de* æqualis ſingulis lateribus ipſius hexagoni, baſibus nempe triangulorum æqualium, in quæ hexagonum ipſum diviſum eſt, quatenus omnia hujuſmodi latera ſunt lateri CD æqualia (e). Ergo triangulum *dae* erit ad ſex triangula, in quæ hexagonum eſt diviſum, ut eſt baſis *de* ad totum hexagoni perimetrum. Conſtat autem, triangulum *dae* eſſe ad triangulum *daf* ſub eadem altitudine conſtitutum, ut baſis *de* ad baſim *df* (f), quæ perimetro ipſius hexagoni poſita eſt æqualis. Ergo eadem eſt ratio trianguli *dae* ad triangulum *daf*, & ad hexagonum ABE; atque adeo area trianguli *daf* aream adæquat hexagoni ACE (g). Area igitur polygoni &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Area cujuslibet polygoni regularis eſt æqualis rectangulo contento ſub cateto, & dimidia parte perimetri ipſius polygoni.

30 Area nimirum hexagoni regularis ACE adæquat rectangulum *adbm* contentum ſub cateto *ad*, & dimidia parte *db* ipſius perimetri. Eſt enim rectangulum *adbm* triangulo *adf* æquale (h).

COROL-

(a) Lib.IX §.123.
(b) ibid. §.21.
(c) Lib.IX. §.99.
(d) Syn.Alg.§.261.
(e) Lib.V.§.20.
(f) Lib.IX. §.96.
(g) Lib.I. §.113.
(h) Lib.IX. §.97.

COROLLARIUM II.

Area polygoni regularis eſt æqualis producto, quod fit ex ductu cateti in dimidiam partem perimetri.

31 Hujuſmodi namque producto rectangulum illud æquale eſt, quod ſub cateto, & dimidia perimetri parte continetur.

PROBLEMA V.

Aream polygoni regularis invenire.

32 Invenire oporteat aream hexagoni regularis ACE.

Reſolutio.

Dimidia pars perimetri ipſius hexagoni multiplicetur per ejuſdem catetum *ad*. Factum erit area quæſita. Ut ſi dimidia pars perimetri ACE fuerit $= m$, & catetus $ad = x$, erit mx area hexagoni ACE. Fig. 17. Tab. VI.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 30.

LEMMA I.

Perimeter polygoni circulo inſcripti minor eſt; perimeter vero polygoni circulo circumſcripti eſt major peripheria ipſius circuli.

Circulo *abcde* inſcriptum ſit pentagonum *abcde*; circumſcriptum vero pentagonum ABCDE. Fig. 18. Tab. VI.

I.

33 Dico primo, perimetrum *abcde* pentagoni inſcripti minorem eſſe peripheria ipſius circuli.

Demonſtratio.

Quævis chorda, ſeu latus pentagoni circulo inſcripti ab illo arcu circuli deficit, cui ſubtenditur (a). Ergo omnia latera pentagoni *abcde* ſimul ſumta minora ſunt integra peripheria circumſcripti circuli *abcde*; adeoque&c.

II.

34 Dico ſecundo, perimetrum pentagoni ABCDE circumſcripti circulo *abcde* peripheriam excedere ipſius circuli.

Demonſtratio.

Ducta namque a puncto contactus *a* ad punctum contactus *e* recta *ae*, manifeſte apparet, duo latera *a*A, A*e* trianguli *a*A*e* arcum excedere *ame*, quemadmodum duo ipſa latera *a*A, A*e* majora ſunt duobus *am*, *me* (b). Spectari enim poteſt arcus *ame* veluti crura trianguli eandem cum triangulo *a*A*e* baſim *ae* habentis. Ergo perimeter ABCDE circumſcripti pentagoni ABCDE major eſt integra peripheria inſcripti circuli *abcde*. Etenim ſicuti latera A*a*, A*e* excedunt arcum *ame*, ita duo *a*B, B*b* arcum ſuperant *anb*, atque ita deinceps. Itaque perimeter &c. quod erat oſtendendum.

LEMMA II.

Perimeter polygoni circulo inſcripti eo minus deficit ab illius peripheria, & perimeter polygoni circulo circumſcripti eo minus illius peripheriam ſuperat, quo plura ſunt ipſius polygoni latera.

Fig. 11. Tab. VI. 35 Minus nimirum deficit a peripheria *abcde* circumſcripti circuli perimeter decagoni *anbocrduem*, quam perimeter pentagoni *abcde* eidem circulo inſcripti. Idipſum dicito de polygonis circulo circumſcriptis, eorum ſcilicet perimetrum minus excedere peripheriam inſcripti circuli, quo plura ſunt ipſius polygoni latera.

Demon-

(a) Lib. V. §. 70. (b) Ibid. §. 69.

Demonſtratio.

Etenim quo plura ſunt latera polygoni tam inſcripti, quam circumſcripti circulo, eo magis polygonum ipſum ad circulum accedit. Circulus enim eſt polygonum infinitorum laterum (a). Ergo, quo plura ſunt polygoni latera, eo minus perimeter inſcripti a circuli peripheria deficit; eo minus vero perimeter circumſcripti eandem ſuperat.

THEOREMA IV.

Peripheria circuli eſt proxime ad diametrum, ut 3141 *ad* 1000, *ſive ut* 314 *ad* 100.

36 Eſto circulus *abfe*. Dico, peripheriam *abfe* eam proxime ad diametrum *af* rationem habere, quam habet 3141 ad 1000, ſive ut 314 ad 100. Fig. 19. Tab. VI.

Demonſtratio.

Ducatur recta *cd*, quæ ſit chorda arcus *graduum* 3, *min.* 45, atque adeo latus polygoni regularis 96 laterum circulo *abfe* inſcripti, eamque ad angulos rectos, ac proinde bifariam, dividat diameter *af* (b). Ductis quoque radiis A*c*, A*d*, ipſisque in directum extra circuli peripheriam productis, ducatur recta tangens BC, quæ erit latus polygoni regularis 96 laterum eidem circulo *abfe* circumſcripti. Cum igitur angulus BAC ſit per hypotheſim *graduum* 3, *min.* 45, ipſumque bifariam dividat recta A*f*, angulus BA*f* erit *unius gradus*, & *min.* 52, *ſecund.* 30. Quamobrem recta *c*F erit *ſinus* anguli *grad.* 1, *min.* 52, *ſecund.* 30; recta vero B*f* erit *tangens* anguli ejuſdem valoris. Poſita idcirco diviſione diametri *af* in partes æquales 20000000, valor rectæ *c*F ex tabulis *ſinuum* erit $= 327190\frac{1}{2}$ & valor rectæ B*f* erit $= 327366$, ut proinde

(a) Lib. IX. §. 149. (b) Lib. VII. §. 41.

inde tota *cd* ſit = 654381, & tota BC ſit = 654732; ut enim recta *cd* a radio *Af*, ita recta BC ab eodem radio bifariam dividitur. Eſt autem recta *cd* latus polygoni regularis 96 laterum circulo *abfe* inſcripti, & recta BC latus polygoni itidem regularis 96 laterum eidem circulo circumſcripti. Ergo multiplicato valore tam rectæ *cd*, quam rectæ BC per 96, factum dabit valorem integri perimetri utriuſque polygoni in partibus diametri *af*, erit nempe perimeter polygoni circulo inſcripti = 62820576, & perimeter polygoni circulo circumſcripti = 62854212; cum ſit 654381 × 96 = 62820576, & 654732 × 96 = 62854272; atque adeo perimeter polygoni regularis 96 laterum circulo *abfe* circumſcripti erit ad circuli diametrum *af*, ut 62854272 ad 20000000, ſive neglectis quatuor ultimis cyphris, ut 6285 ad 2000, & perimeter polygoni regularis 96 laterum eidem circulo inſcripti erit ad illius diametrum, ut 62820576 ad 20000000, ſeu ut 6282 ad 2000, ſi quatuor itidem ultimæ cyphræ negligantur. Conſtat autem, perimetrum polygoni circulo inſcripti ab illius peripheria deficere, perimetrum vero polygoni circulo circumſcripti illius peripheriam excedere (a). Ergo, ſpectata peripheria circuli veluti media proportionalis inter perimetrum polygoni regularis 96 laterum ipſi circulo circumſcripti, & perimetrum ejuſdem indolis eidem circulo inſcripti, peripheria erit ad diametrum, ut 6282 ad 2000, ſeu ut 3141 ad 1000, ſive ut 314 ad 100 proxime. Ceterum vis hujus demonſtrationis evidentius patebit, cum *ſinuum*, *ſecantium*, atque *tangentium* doctrina, alibi tradenda, percepta fuerit.

SCHOLION I.

37 Quoniam vero perimeter polygoni regularis circulo inſcripti minus deficit a peripheria ipſius circuli, & perimeter polygoni itidem regularis circulo circumſcripti peripheriam ipſam minus excedit, quo plura ſunt, adeoque minoris magnitudinis, ipſorum polygonorum latera (b), perſpicuum rema-

(a) §.33. & 34. (b) § 35.

remanet, exactius determinari poſſe, quamnam ad ſuam diametrum circuli peripheria proportionem habeat, ſi loco polygoni *96* laterum, *chiliogonum*, ſeu polygonum 1000 laterum, vel *myriogonum*, ſive polygonum 10000 laterum, aut aliud pluribus adhuc lateribus conſtans, aſſumatur. Hinc proportiones aliæ peripheriæ circuli ad diametrum determinatæ ſunt ea accuratiores, quam ſupra exhibui. Inter has eminent duæ a Viro Cl. Ludolpho a Ceulen inventæ, quarum altera cyphris *21*, altera *36* definitur. Eas tamen prætereo, quod in praxi multum negotii faceſſant.

SCHOLION II.

38 Circuli *tetragoniſmum* per polygona regularia circulo inſcripta, & circumſcripta primus omnium tentavit Archimedes. Hac igitur uſus methodo, determinavit vir ſummus, peripheriam circuli continere ejuſdem diametrum minus quam *ter*, & *unam ſeptimam* illius *partem*; plus vero quam *ter*, & *decem* ex illius partibus *ſeptuageſimis primis*, videlicet poſito valore diametri = 1, peripheriam eſſe ad diametrum, ut $3\frac{1}{7}$ ad 1, & hanc proportionem eſſe majorem vera; poſito autem valore diametri = 71, peripheriam eſſe ad diametrum, ut 223 ad 71, & hanc proportionem eſſe veram minorem, ita nimirum ut poſita diviſione diametri in partes æquales 71, recta continens 223 ex hiſce partibus ſit minor peripheria ipſius circuli; poſita vero diviſione diametri in 7 partes itidem æquales, recta 22 ex hiſce partibus complectens peripheriam circuli excedat. Inito ſiquidem calculo, invenit, perimetrum polygoni regularis *96* laterum circulo inſcripti eſſe ad circuli diametrum, ut $3\frac{10}{71}$ ad 1, perimetrum vero polygoni ejuſdem indolis circulo circumſcripti eſſe ad diametrum, ut $3\frac{1}{7}$ ad 1, ut proinde fractio $\frac{223}{71}$ exprimat rationem peripheriæ ad diametrum minorem vera, fractio vero $\frac{22}{7}$ rationem peripheriæ ad diametrum majorem vera

defi-

deſignet. At vero cum Archimedea proportio abſque notabili errore in majoribus circulis adhiberi minime queat; quæ vero prolixis numeris traditur, multum in praxi, ut diximus, negotii faceſſat, ea in praxi adhiberi poteſt, quam ſupra tradidimus, videlicet quæ fractione $\frac{3141}{1000}$ exprimitur, loquendo de circulis majoribus, quæ vero fractione $\frac{314}{100}$ deſignatur, ſi res ſit de circulis minoribus, niſi forte ea magis arrideat, quam a ſuo parente inventam, & demonſtratam tradit Hadrianus Metius, quaque in terraquei orbis magnitudine definienda, ut refert Purchotius, uſi ſunt Mathematici Regii Pariſienſes, peripheriam nempe circuli eſſe ad illius diametrum, ut 355 ad 113.

SCHOLION III.

39 Cum eadem ſit ratio peripheriæ cujusvis circuli ad ſuam diametrum perſpicuum eſt, quod alibi aliter demonſtravimus (a), peripherias duorum quorumcunque circulorum eſſe *directe* inter ſe, ut ipſorum diametri (b).

PROBLEMA VI.

Data circuli diametro, illius peripheriam invenire.

Fig. 19. Tab. VI. 40 Eſto circulus *abfe*, cujus diametri *af* notus ſit valor. Invenire oporteat valorem peripheriæ in partibus diametri.

Reſolutio.

Fractio $\frac{m}{r}$ exprimat rationem diametri ad peripheriam. Valor autem diametri *af* ſit $= x$. Fiat ergo ut *m* ad *r*, ita *x* ad quartum proportionalem, ſcilicet $\frac{rx}{m}$ (c). Erit $\frac{rx}{m}$ valor peripheriæ *abfe* quæſitus.

Demon-

(a) Lib. IX. §. 155. (b) Lib. I. §. 125. (c) Ibid. §. 87.

Demonſtratio.

Eadem namque eſt ratio diametri omnium circulorum ad ſuam peripheriam.

PROBLEMA VII.

Data circuli peripheria, illius diametrum invenire.

41 Notus ſit valor peripheriæ circuli $abfe$. Invenire oporteat valorem diametri af. Fig. 19. Tab. VI.

Reſolutio.

Ratio peripheriæ ad diametrum exprimatur fractione $\frac{r}{m}$ ſitque x valor peripheriæ. Fiat ergo ut r ad m, ita x ad quartum terminum proportionalem (a), nempe $\frac{mx}{r}$. Erit $\frac{mx}{r}$ valor diametri af quæſitus.

SCHOLION.

42 Cognito valore diametri circuli, valor quoque ſemidiatri innoteſcet, ſi nimirum diametri valor bifariam dividatur.

THEOREMA V.

Area circuli æqualis eſt triangulo rectangulo, cujus alterum latus eorum, quæ ſunt circa angulum rectum, adæquat radium, alterum peripheriam ipſius circuli.

43 Eſto triangulum rectangulum BCD, cujus rectus angulus ſit BCD. Latus autem BC ſit æquale radio circuli AC, Fig. 20. Tab. VI.
Ii latus

(a) Lib. I. §. 17.

Archim. de dimen. circuli p. I. latus vero CD ejuſdem peripheriam adæquet: Dico, aream circuli AC æqualem eſſe areæ trianguli BCD.

Demonſtratio I.

Circulus AC eſt polygonum regulare infinitorum laterum (a), cujus *catetus* ab illius radio BC minime diſtinguitur (b). Ergo circulus AC eſt triangulo BCD æquale (c).

Demonſtratio II.

Concipiatur area circuli AC veluti conſurgens ex peripheriis tot circulorum idem centrum B habentium, atque in eodem plano deſcriptorum, quot ſunt minima puncta in radio BC; triangulum quoque BCD veluti conflatum ex tot rectis parallelis baſi CD, quot ſunt minima puncta in latere, ſive altitudine BC (d). Igitur tot erunt peripheriæ conſtituentes aream circuli AC, quot ſunt rectæ conſtituentes aream trianguli BCD, nempe tot, quot in recta BC puncta reperiuntur. Elementa autem areæ circularis AC æqualia ſunt elementis areæ triangularis BCD, alterum alteri. Quandoquidem ſpectetur peripheria *ba*, & recta *ad* eidem puncto *a* radii BC reſpondentes. Quoniam igitur recta *ad* eſt parallela baſi CD, erit *ad* ad CD, ut eſt B*a* ad BC(e). Eſt autem etiam peripheria *ba* ad peripheriam AC, ut radius B*a* ad radium BC (f). Ergo erit recta *ad* ad rectam CD, ut peripheria *ba* ad peripheriam AC (g). Eſt autem per hypotheſim peripheria AC æqualis rectæ CD. Ergo peripheria *ba* æqualis erit rectæ *ad* (h). Idipſum eodem modo de omnibus aliis elementis circuli AC, & trianguli ACD demonſtrabitur. Ergo elementa circuli AC ſunt numero, & magnitudine æqualia elementis trianguli ACD; atque adeo area circuli AC aream adæquat trianguli ACD (i). Igitur area circuli &c. quod erat oſtendendum.

SCHO-

(a) Lib.IX. §.149.
(b) Ibid. §.150.
(c) §.29.
(d) Lib.IX.§.46.81.
(e) Ibid. §.60.
(f) Ibid. §.154.
(g) Lib.I. § 76.
(h) Ibid. §.128.
(i) Lib.IX.§.53.

SCHOLION.

44 Hinc aliter oſtendi poteſt, quod alibi demonſtravimus (a), *circulos* nempe *eſſe inter ſe in ratione duplicata ſuarum ſemidiametrorum*. Facta namque hypotheſi, ut circulus AC adæquet triangulum rectangulum BCD, & circulus *ba* triangulum B*ad* ſimile triangulo BCD, cum triangula hujuſmodi ſint in ratione *duplicata* ſuorum laterum homologorum, ſive radiorum BC, B*a* circulorum AC, *ba* (b), in ratione quoque eorundem *duplicata* erunt circuli AC, *ba*.

COROLLARIUM I.

Circulus æqualis eſt rectangulo, cujus alterum latus adæquat radium, alterum ſemiperipheriam ipſius circuli.

45 Ut ſi latus C*e* rectanguli BC*ef* æquale fuerit ſemiperipheriæ circuli AC, & latus BC ejuſdem radio, circulus AC erit rectangulo BC*ef* æqualis. Eſt enim rectangulum BC*ef* æquale triangulo BCD (c), quod circulus AC adæquat (d). Fig. 20. Tab. VI.

COROLLARIUM II.

Circulus eſt æqualis rectangulo contento ſub quarta parte diametri, & tota peripheria, ſicuti etiam rectangulo contento ſub diametro, & quarta parte peripheriæ ipſius circuli.

46 Circulus nempe AC adæquat rectangulum *a*CD*n* contentum ſub *a*C, quarta nimirum parte diametri AC, & ſub recta CD, quæ ſit æqualis integræ peripheriæ ipſius circuli. Item rectangulum ACg*m*, quod ſub recta C*g*, quarta ſcilicet parte peripheriæ totius circuli, & ſub tota ejuſdem diametro AC continetur. Eſt enim utrumque hujuſmodi rectangulum æquale rectangulo BC*ef* (e), cui circulus ipſe eſt æqualis (f). Fig. 20. Tab. VI.

(a) Lib. IX §. 185. (b) Ibid. §. 166. (c) Ibid. §. 97. (d) § 43. (e) Lib. IX. §. 97. 102. (f) §. 43.

COROLLARIUM III.

Area circuli æqualis eſt producto, quod fit ex ductu radii in ſemiperipheriam, vel totius peripheriæ in quartam partem diametri, vel totius diametri in quartam partem peripheriæ.

47 Sequitur manifeſte ex præcedentibus.

COROLLARIUM IV.

Quadratum circulo circumſcriptum eſt ad ipſum circulum, ut ipſius circuli diameter ad quartam partem peripheriæ.

48 Videlicet quadratum EFGH circulo ABCD circumſcriptum eam habet proportionem ad ipſum circulum, quam habet ipſius circuli diameter AC ad quartam partem CD peripheriæ ABCD. Super rectam enim CM, quæ peripheriæ ABCD quartam partem adæquet, & ſub altitudine diametri AC conſtituatur rectangulum ACML. Erit quadratum EFGH ad rectangulum ACML, ut eſt recta FG ad rectam CM, ſive ut diameter ABCD ad quartam peripheriæ partem (a). Circulus autem ABCD eſt æqualis rectangulo ACML (b). Ergo quadratum EFGH erit ad circulum ABCD, ut eſt diameter AC ad quartam peripheriæ partem CD (c).

Fig. 21. Tab. VI.

COROLLARIUM V.

Quadratum circulo inſcriptum eſt ad ipſum circulum, ut diameter ejuſdem circuli ad ſemiperipheriam.

49 Quadratum nempe ABCD inſcriptum circulo ABCD eſt ad illum, ut diameter AC ad ſemiperipheriam ADC. Etenim, cum quadrilaterum EFGH ſit quadratum diagonalis AC quadrati ABCD circulo inſcripti, & quadratum ABCD ſit quadratum lateris AD ejuſdem quadrati ABCD qua-

Fig. 21. Tab. VI.

(a) Lib. IX. §. 195. (b) §. 46. (c) Lib. I. §. 112.

quadratum EFGH erit duplum quadrati ABCD (a). Igitur quadratum ABCD erit ad circulum ABCD, ut eſt ſemidiameter KC ad quartam partem peripheriæ ipſius circuli (b). Eſt autem ſemidiameter KC ad quartam peripheriæ partem, ut diameter ad ſemiperipheriam (c). Ergo quadratum ABCD erit ad circumſcriptum ſibi circulum ABCD, ut diameter AC ad ſemiperipheriam ipſius circuli (d).

COROLLARIUM VI.

Circulus eſt ad quadratum ſibi circumſcriptum, ut 1000 *ad* 785 *proxime. Ad quadratum vero ſibi inſcriptum, ut* 1570 *ad* 1000.

50 Sequitur ex præcedentibus, facta nempe hypotheſi, ut peripheria circuli ſit proxime ad ſuam diametrum, ut 3141 ad 1000 (e).

SCHOLION.

51 Cum vero juxta calculum Archimedis peripheria circuli ſit proxime ad ſuam diametrum, ut 22 ad 7, quadratum circulo circumſcriptum erit proxime ad ipſum circulum, ut 14 ad 11. Quadratum vero circulo inſcriptum erit ad ipſum circulum, ut 7 ad 11 proxime. Archimed. lib. de dim. circuli p. 2.

PROBLEMA VIII.

Data circuli diametro, illius aream invenire.

52 Diameter AC circuli ABCD ſit $= m$. Invenire oporteat illius aream.

Reſolutio.

Ex noto valore diametri AC determinetur valor peripheriæ ABCD (f). Tum in quartam hujus valoris partem valor m diametri ducatur. Factum erit area circuli quæſita. Fig. 21. Tab. VI.

Idip-

(a) Lib. VI. §. 39. (b) §. 48. (c) Lib. I §. 126. (d) Ibid. §. 76. (e) §. 36. (f) §. 40.

Digitized by Google

Idipſum quoque obtinetur, ſi valor totius peripheriæ per quartam diametri partem multiplicetur.

Demonſtratio.

Patet ex §. 47.

PROBLEMA IX.

Data circuli peripheria, illius aream invenire.

53 Valor peripheriæ ABCD dati circuli ſit $= m$. Determinare oporteat illius aream.

Reſolutio.

Fig. 21. Tab. VI. Ex noto peripheriæ valore eliciatur valor diametri AC (a). Tum fiat multiplicatio vel totius diametri in quartam partem peripheriæ, vel totius peripheriæ per quartam partem diametri. Quod enim hinc fit productum, erit area circuli ABCD quæſita.

Demonſtratio.

Patet ex eodem §. 47.

THEOREMA VI.

Area ſectoris circuli adæquat triangulum rectangulum, cujus alterum latus eorum, quæ ſunt circa angulum rectum, eſt æquale radio, alterum arcui ipſius ſectoris.

Fig. 23. Tab. VI. 54 Eſto triangulum rectangulum ACD, cujus latus AC ſit æquale radio, & latus CD arcui CB ſectoris BAC circuli FCB. Dico, aream ſectoris BAC æquare triangulum ACD.

Demonſtratio.

Super rectam CE, quæ circuli BFC peripheriam adæquet,

&

(a) §. 41.

& ſub eadem altitudine radii AC conſtituatur triangulum rectangulum ACE. Manifeſtum eſt, triangulum ACE eſſe ad triangulum ACD, ut eſt baſis CE ad baſim CD (a); ac proinde per hypotheſim, ut eſt peripheria circuli BFC ad arcum CB ſectoris CAB. Eſt autem circulus BFC ad ſectorem BAC, ut tota peripheria BFC ad arcum BC (b). Ergo triangulum quoque ACE erit ad triangulum ACD, ut eſt circulus BFC ad ſectorem BAC (c); & *alternando* erit triangulum ACD ad ſectorem BAC, ut triangulum ACE ad circulum BFC (d). Triangulum autem ACE adæquat circulum BFC (e). Ergo triangulum quoque ACD ſectorem æquabit BAC (f). Itaque area ſectoris &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Sector circuli eſt æqualis rectangulo contento ſub recta, quæ ſit arcui ipſius ſectoris æqualis, & ſub dimidio radio, vel ſub toto radio, & dimidia parte illius rectæ.

55 Ut ſi recta CD fuerit æqualis arcui CB ſectoris BAC, erit ſector BAC æqualis rectangulo *n*CD*x* contento ſub ipſa CD, & ſub dimidia parte C*n* radii AC, ſicuti etiam rectangulo ACz*m*, quod ſub medietate Cz rectæ CD, & ſub toto radio AC continetur. Eſt enim tam rectangulum *n*CD*x*, quam rectangulum ACz*m* æquale triangulo ACD (g), cui ſector ipſe BAC eſt æqualis (h). Fig. 28. Tab. VI.

COROLLARIUM II.

Area ſectoris circuli eſt æqualis producto, quod fit ex ductu arcus ipſius ſectoris in medietatem radii, vel ex ductu integri radii in medietatem illius arcus.

56 Sequitur ex præcedenti.

PRO-

(a) Lib. IX. §. 96. (b) Ibid. §. 162. (c) Lib. I. §. 76. (d) Ibid. § 125. (e) §. 43. (f) Lib. I. §. 45. (g) Lib. IX. §. 97. 102. (h) §. 54.

PROBLEMA XI.

Aream ſectoris circuli invenire.

57 Eſto ſector BAC circuli BFC, cujus aream invenire oporteat.

Reſolutio.

Fig.21. Tab.VI. Multiplicetur valor arcus BC per valorem dimidii radii AC, vel totius radii AC per valorem dimidii arcus BC. Factum erit area ſectoris BAC quæſita.

Demonſtratio.

Patet ex §. 56.

PROBLEMA XI.

Aream ſegmenti circularis invenire.

58 Determinare oporteat valorem ſegmenti circularis ACD

Reſolutio.

Fig.22. Tab.VI. A centro B ipſius circuli ad extrema puncta A, C arcus ADC dati ſegmenti ducantur radii BA, BC. Tum per §. 57 inveniatur area ſectoris ABCD, cui ſubducatur valor areæ triangularis ACB. Quod enim hinc relinquitur, erit valor ſegmenti ACD quæſitus.

Demonſtratio.

Cognito enim valore totius, & unius partis, valor quoque alterius partis per ſubductionem palam efficitur.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE